Mérnökinformatikus BSc
Valószínűségszámítás PPZH2
2016. december 14.

1. Két kalapba számozott golyókat raktunk. Az elsőbe 6 darab pirosat 1-től 6-ig számozva, a másodikba 4 darab fehéret 1-től 4-ig számozva. Kihúzunk mindkét kalapból véletlenszerűen egy-egy golyót. Mennyi a kihúzott golyókon lévő számok szorzatának várható értéke és szórása?

Megoldás: Jelölje X az elsőnek kihúzott, Y pedig a másodiknak kihúzott számot, $Z = XY$.

$R_Z = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24\}$

i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24
$\mathbf{P}(Z=i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

$\mathbf{E}Z = \frac{1+4+6+12+5+18+16+9+10+36+15+16+18+20+24}{24} = \frac{35}{4} = 8.75$

$\mathbf{E}Z^2 = \frac{1+8+18+3\cdot16+25+3\cdot36+2\cdot64+81+100+3\cdot144+15\cdot15+16\cdot16+18\cdot18+400+24\cdot24}{24} = \frac{455}{4} = 113.75$

$\sigma^2 Z = \mathbf{E}Z^2 - (\mathbf{E}Z)^2 = \frac{455}{4} - (\frac{35}{4})^2 = \frac{595}{16} = 37.188 \Rightarrow \sigma Z = \sqrt{\frac{595}{16}} = 6.0982$

Másik megoldás:

Kevesebbet kell számolni ha így gondolkozunk:

Az összes lehetséges X és Y értékre az $X \cdot Y$ szorzatok összege az alábbi szorzat kifejtéséből adódik: $(1+2+3+4+5+6)\cdot(1+2+3+4) = 21\cdot10 = 210$ és mindegyiknek $1/24$ a valószínűsége, tehát

$\mathbf{E}Z = (1+2+3+4+5+6)\cdot(1+2+3+4)/24 = \frac{210}{24} = 8.75$

Z^2-re hasonlóan

$\mathbf{E}Z^2 = (1+4+9+16+25+36)\cdot(1+4+9+16)/24 = 113.75$

2. Legyenek X_1, X_2, X_3 teljesen független, azonos eloszlású valószínűségű változók, melyeknek létezik a várható értékük. Ekkor mennyi az $\mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}\right)$ várható érték?

Megoldás: $1 = \mathbf{E}(1) = \mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{X_1+X_2+X_3}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+X_3}\right) + \mathbf{E}\left(\frac{X_2}{X_1+X_2+X_3}\right) + \mathbf{E}\left(\frac{X_3}{X_1+X_2+X_3}\right) = 3\cdot\mathbf{E}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+X_3}\right)$

$\mathbf{E}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+X_3}\right) = \frac{1}{3}$, $\frac{X_1}{X_1+X_2+X_3}$ és $\frac{X_2}{X_1+X_2+X_3}$ azonos eloszlásúak $\Rightarrow \mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}\right) = \frac{2}{3}$.

3. Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & \text{, ha } x>0, y>0 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Számolja ki a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

Megoldás:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = x\cdot e^{-x}\cdot e^{-y}, x>0, y>0$$

A komponensek függetlenek!

4. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az $1,2,3$ számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. X az első, Y a második húzás eredménye. Adja meg $\mathbf{P}(X<Y)$-t és $\sigma^2(X-Y)$-t! Függetlenek-e X és Y?

Megoldás: Az együttes eloszlás táblázata:

Y \ X	1	2	3	Y perem
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
X perem	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbf{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbf{P}(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{2}$
$\mathbf{E}(X - Y) = 0, \sigma^2(X - Y) = \mathbf{E}(X - Y)^2 = 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = 2$
X és Y nem függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{9}$

5. Legyenek $X \in N(-2, 2)$ és $Y \in E(2)$ független valószínűségi változók. Adja meg az együttes sűrűségfüggvényüket és a $Z = (1 - Y) \cdot (X^2 + 1)$ várható értékét.
Megoldás:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{8}} \cdot 2 \cdot e^{-2y}, y > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}(1 - Y) \cdot \mathbf{E}(X^2 + 1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot (4 + 4 + 1) = 4.5$$

6^{IMSC}. Legyenek $X, Y \in N(1, 2)$ függetlenek és $T = \max\{X, Y\}$ és $W = \min\{X, Y\}$. Számolja ki a T és W együttes sűrűségfüggvényét!
Megoldás: $F_{T,W}(r,s) = \mathbf{P}(T < r, W < s) = \mathbf{P}(T < r) - \mathbf{P}(T < r, W \geq s) =$
$= \mathbf{P}(X < r, Y < r) - \mathbf{P}(s \leq X < r, s \leq Y < r) = (\Phi(\frac{r-1}{2}))^2 - (\Phi(\frac{r-1}{2}) - \Phi(\frac{s-1}{2}))^2;$
Deriválva r és s szerint:
$f_{T,W}(r,s) = \frac{1}{2} \cdot \varphi(\frac{r-1}{2})\varphi(\frac{s-1}{2}) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(r-1)^2+(s-1)^2}{8}}, s \leq r.$