9. R, RE, Rice-tétel

1. Igazolja, hogy ha L rekurzívan felsorolható, akkor L^* is rekurzívan felsorolható!

   Megoldás: A rekurzív nyelvre vonatkozó megoldással itt az a baj, hogy ha egy szóra M nem áll meg, akkor nem lenne lehetőség a következő felbontást kipróbálni. Ezért a szokásos lépésszámkorlátos futtatást kell bevezetni, például így:

   $\ell = 1, 2, \ldots$ esetén nézzük sorban végig az összes lehetséges felbontást (csak véges sok van!), mindegyiknél minden darabon ℓ lépésig futtassuk az M gépet. Ha valamelyik felbontásnál minden darabot elfogad M ezen a lépésszámon belül, akkor M^* álljon meg elfogadó állapotban, különben folytassa az eljárást.

   Ekkor, ha $w \in L^*$, akkor van olyan felbontás, és olyan ℓ, hogy az adott felbontás minden darabját az M gép ℓ lépésen belül elfogadja. Ilyen esetben pedig az M^* megáll elfogadó állapotban.

   Ha viszont $w \notin L^*$, akkor ez az M^* nem fog megállni, és ezért persze nem is fogad el, ami helyes működés.

2. Az L nyelv álljon az olyan Turing-gépek w kódjából, hogy a w kódú Turing-gép egyetlen bemeneten sem áll meg. Igaz-e, hogy $L \in \text{co}\,\text{RE}$?

   Megoldás: Az állítás igaz.

   $L \in \text{co}\,\text{RE}$ pontosan akkor teljesül, ha $\overline{L} \in \text{RE}$, azaz ha van TG, ami $\overline{L}$-et ismeri fel. $\overline{L}$ az olyan w-kből áll, amelyek vagy nem TG kódok vagy van hozzájuk olyan s bemenet, amin M_w megáll. Vázolunk ehhez egy TG-t, ami lényegében egy megfelelő s bemenetet keres.

   Az M TG egy w bemeneten

   - ellenőrzi, hogy w egy TG kódja-e. Ha nem, akkor álljon meg elfogadó állapotban.
   - A szokott módon sorban generálja az (s,i) szó–lépésszámkorlát párokat és mindegyiknél futtatja az M_w gépet az s bemeneten i lépésig. Ha M_w eközben elakad, akkor M álljon meg elfogadó állapotban. Ha viszont nem akad el, akkor vegye a következő párt.

   Ez az M akkor fog egy TG kódot elfogadni, amikor eljut egy (s,i) párhoz, amire $M_w(s)$ megáll i lépésben. Ha ilyen nincs, akkor M nem áll meg, Ez utóbbi pontosan akkor történik, ha M_w nem áll meg egyetlen szón sem. Tehát $L(M) = \overline{L}$ és ezért $L \in \text{co}\,\text{RE}$

   Megjegyzés: itt már valóban végtelen sok s között kell keresni egy megfelelőt, nem lehet egy véges halmazra megszorítani. Ki kell használnunk a lehetőséget, hogy M-nek nem kell megállnia.

3. Legyen $L \subseteq \{x\#y : x, y \in \{0,1\}^*\}$ rekurzívan felsorolható. Következik-e ebből, hogy az

   $$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* : \text{ van olyan } y \in \{0,1\}^*, \text{ hogy } x\#y \in L\}$$

   nyelv is rekurzívan felsorolható?

   Megoldás: Megmutatjuk, hogy $L_1 \in \text{RE}$. Ehhez egy M_1 TG-t kell vázolni, amire $L(M_1) = L_1$. Az M_1 gép egy x bemeneten lényegében olyan y-t keres, amire $x\#y \in L$. Ehhez a szokásos módon sorban veszi az (s,i) szó-lépésszámkorlát párokat, és egy ilyen párnál az L-et felismerő M gépet az $x\#s$ bemeneten futtatja i lépésig. Ha ez alatt M elfogad, akkor M_1 álljon meg elfogadó állapotban, különben lépjen a következő párra.

   Mivel $x \in L_1$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan y, amire $x\#y \in L$, azaz $M(x\#y)$ elfogad mondjuk j lépésben. Amikor a pároknál M_1 először ér egy olyan (y,i) párhoz, ahol $i \geq j$, akkor M_1 meg fog állni és elfogad. Ha viszont $x \notin L_1$, akkor nincs $x\#y$, amit M elfogadna, tehát M_1 nem fog megállni, azaz ilyenkor $x \notin L(M_1)$. Ezért $L(M_1) = L$.

4. Rekurzív-e az $L = \{w : w \text{ Turing-gép kód és } |L(M_w)| = 5\}$ nyelv?

   Megoldás: A T nyelvi tulajdonság itt az, hogy a nyelvnek pontosan 5 szava van, $T = \{L : |L| = 5\}$. Ez nemtriviális nyelvi tulajdonság, hiszen pl. $L_1 = \{0^k : 0 \leq k \leq 4\} \in T$ egy pozitív példa, és mivel L_1 véges, ezért reguláris, és így persze $L_1 \in \text{RE}$. Negatív példának most is jó az $L_2 = \emptyset$ választás. A Rice-tételből következik, hogy $L = L_T \notin \text{R}$.

5. Álljon az L nyelv azokból a w szavakból, melyekre a w kódú Turing-gép létezik és az általa elfogadott nyelvben van legalább egy csupa 0-ból álló szó. Igaz-e, hogy ez a nyelv rekurzívan felsorolható? Igaz-e, hogy ez a nyelv rekurzív?

   Megoldás: Ahhoz, hogy rekurzívan felsorolható, egy M TG-t kell vázolni, ami ezt a nyelvet fogadja el, azaz M lényegében adott w-hez egy olyan $\mathtt{0}^k$ szót keres, amire $\mathtt{0}^k \in L(M_w)$. M egy w bemeneten:

   - ellenőrzi, hogy w TG kód-e. Ha nem, akkor M álljon meg elutasítva.
   - A (k,i) párokon sorba menve M futtatja M_w-t a $\mathtt{0}^k$ szón i lépésig. Ha ez alatt M_w elfogad, akkor M álljon meg elfogadó állapotban, különben menjen tovább a következő párra.

   Ha van $\mathtt{0}^k \in L(M_w)$, akkor M_w ezt valahány lépésben elfogadja, és ha i legalább ennyi, akkor M a (k,i) párnál megáll elfogadó állapotban. Ha viszont nincs csupa 0 szó az M_w nyelvében, akkor M keresése nem fog megállni, és így persze nem is fogadja el w-t. Tehát valóban $L(M) = L$, azaz $L \in \mathrm{RE}$.

   Annak belátásához, hogy L nem rekurzív, vegyük észre, hogy az, hogy egy nyelv tartalmaz csupa 0-ból álló szót egy nyelvi tulajdonság, $T = \{L : \exists k, \mathtt{0}^k \in L\}$. Nem triviális, mert pl. $L_1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \in \mathrm{RE}$ egy pozitív, míg $L_2 = \emptyset \in \mathrm{RE}$ egy negatív példa. Ezért $L = L_T$ a Rice-tétel miatt nem rekurzív.

6. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek kódjaiból, amelyek csak páros hosszú szavakat fogadnak el. Igaz-e, hogy L

   a) rekurzív?

   b) rekurzívan felsorolható?

   c) co RE-ben van?

   Megoldás:

   a) Nem igaz. Legyen $T = \{L : w \in L \implies |w| \text{ páros }\}$. Ez a nyelvi tulajdonság nem triviális, hiszen van rá pozitív példa, pl. $L_1 = \{\mathtt{00}\}$, ami valóban RE-ben is van, hiszen egy véges nyelv reguláris, és ezért rekurzív, ami miatt RE-ben is benne van. (Közvetlenül sem nehéz megadni hozzá egy TG-t.) Negatív példának jó pl. az $L_2 = \{\mathtt{0}\} \in \mathrm{RE}$ hasonló okok miatt.

   Megmutatjuk, hogy c) igaz, és ebből már következik, hogy b) nem igaz, hiszen ha egy nyelv RE-ben és co RE-ben is benne van, akkor rekurzív is, ami az a) szerint nem teljesül.

   c) $L \in \mathrm{co\,RE}$ pontosan akkor, ha $\overline{L} \in \mathrm{RE}$, azaz van olyan TG, ami az $\overline{L}$ nyelvet ismeri fel. $\overline{L}$ elemei a nem TG kódok és azok a w TG kódok, melyekre M_w elfogad legalább egy páratlan hosszú szót is. Az M gép lényegében egy ilyen páratlan hosszú szót keres. M egy w bemeneten

   - ellenőrzi, hogy w TG kód-e. Ha nem, akkor M álljon meg elfogadó állapotban.
   - A szokott módon sorban előállítja az (s,i) párokat, ahol s páratlan hosszú szó, $i = 1, 2, \ldots$. Az M_w gépet az s szón i lépésig futtatja. Ha ez alatt M_w elfogad, akkor M álljon meg elfogadó állapotban, különben vegye a következő párt.

   Ha M_w elfogad egy páratlan hosszú s szót, akkor, amint M az (s,i) párhoz ér egy megfelelő i értékkel, akkor M elfogadja a w szót. Különben meg, ha nincs ilyen s szó, akkor M nem áll meg. Ezért $L(M) = L$.

7. Rekurzív-e az $L = \{w : w \text{ Turing-gép kód és } L(M_w) = L_u\}$ nyelv?

   Megoldás: Az, hogy egy nyelv épp az L_u, egy nyelvi tulajdonság, $T = \{L : L = L_u\}$. Nem triviális, hiszen $L_1 = L_u \in \mathrm{RE}$ rendelkezik a tulajdonsággal, míg mondjuk $L_2 = \emptyset \in \mathrm{RE}$ nem. Ezért a Rice-tételből következik, hogy $L = L_T \notin \mathrm{R}$.

. . . .