O, Ω, Θ

1. Ugyanarra a feladatra van két algoritmusunk A és B. A maximális lépésszámot leíró függvényeket jelölje f_A és f_B. Tudjuk, hogy $f_A(n) \in O(f_B(n))$. Következik-e ebből, hogy
   a) A minden bemeneten gyorsabb, mint B?
   b) A véges sok bemenet kivételével gyorsabb, mint B?
   c) A megfelelően nagy bemenetekre gyorsabb, mint B?

2. Az alábbi függvények közül melyikre igaz, hogy $O(n^2)$ és melyikre, hogy $\Omega(n^2)$?
   $f_1(n) = 11n^2 + 100000$ $\quad f_2(n) = 8n^2 \log_2 n$ $\quad f_3(n) = 1{,}5n + 3\sqrt{n}$

3. Mely $a, b > 1$ egész számokra teljesülnek az alábbiak?
   $n^a \in O(n^b)$ $\quad 2^{an} \in O(2^{bn})$ $\quad \log_a n \in O(\log_b n)$

4. Az alábbi függvényeket rendezze nagyságrend szerint nem csökkenő sorozatba: ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) \in O(f_j(n))$ teljesüljön!
   $f_1(n) = 8n^3$ $\quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n$ $\quad f_3(n) = 2^{(\log_2 n)^2}$ $\quad f_4(n) = 1514n^2 \log_2 n$

5. Adjon O becslést a következő függvényekre:
   $(n^2+8)(n+1)$ $\quad (n \log n + n^2)(n^3+2)$ $\quad (n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$ $\quad (2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

6. Tekintsük az $f_1(n) = 1{,}5\, n!$ és $f_2(n) = 200\,(n-1)!$ függvényeket. Melyik igaz és melyik nem az alábbiak közül?
   $f_1 \in O(f_2)$ $\quad f_2 \in O(f_1)$ $\quad f_1 \in \Omega(f_2)$ $\quad f_2 \in \Omega(f_1)$ $\quad f_1 \in \Theta(f_2)$ $\quad f_2 \in \Theta(f_1)$

7. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n méretű bemeneteken $L(n)$. Adjunk felsőbecslést az $L(n)$ nagyságrendjére, ha tudjuk, hogy $L(1) = 2$ és $n > 1$ esetén
   (a) $L(n) = L(n-1) + 3$
   (b) $L(n) = L(n-1) + 5$
   (c) $L(n) = L(n-1) + 3n$
   (d) $L(n) = 2L(n-1) + 3$
   (e) $L(n) = L(\lceil n/2 \rceil) + 3$
   (f) $L(n) = L(\lceil n/2 \rceil) + n^k$
   (g) $L(n) = 2L(\lceil n/2 \rceil) + 3$
   (h) $L(n) = 4L(\lceil n/2 \rceil) + 3$

   Az (e)-(h) esetben elegendő 2 hatványra meggondolni.

   Mi változik, ha egyenlőség helyett $\leq$ vagy $\geq$ áll?
   És ha O helyett Θ a feladat?