Környezetfüggetlen nyelvek

Kiegészítő anyag az Algoritmuselmélet tárgyhoz

(a Rónyai–Ivanyos–Szabó: Algoritmusok könyv mellé)

Friedl Katalin
BME SZIT
friedl@cs.bme.hu

2017. augusztus 3.

A reguláris nyelveket véges automatákkal vagy reguláris kifejezésekkel adtuk meg. Természetesen vannak további lehetőségek is. Most a nyelvekben levő szabályszerűségek egy másmilyen megadásáról lesz szó, ami a reguláris nyelveken túl is alkalmazható. Ez a *formális nyelvtan* vagy röviden *nyelvtan*.

A formális nyelvtanok nem egészen olyanok, mint például a magyar nyelvtan. Bár eredetileg a természetes nyelvek szabályainak leírására készültek, de könnyebben használhatóak mesterséges nyelvek, például programozási nyelvek pontos megadására, mint egy beszélt nyelv helyes mondatainak tökéletes leírására.

1. Környezetfüggetlen nyelvtan

A formális nyelvtanok lényegében átírási szabályokat adnak meg, amelyekkel egy kezdő szimbólumból kiindulva szavakat tudunk előállítani.

A formális nyelvtanoknak itt csak egy speciális, talán a leggyakrabban használt fajtájával foglalkozunk, ami már önmagában is elég ahhoz, hogy nem reguláris nyelvet is leírjunk vele.

1. Definíció. *Egy* környezetfüggetlen nyelvtan *(röviden* CF nyelvtan*) alatt egy olyan $G = (V, \Sigma, S, P)$ rendszert értünk, ahol*

- V *egy véges, nem üres halmaz, a* változók *(vagy* nemterminálisok*) halmaza,*
- Σ *az ábécé, a karakterek (vagy* terminálisok*) halmaza.*
  Feltétel*, hogy* $V \cap \Sigma = \emptyset$.
- $S \in V$ *a* kezdő változó*,*

- *P egy véges halmaz, az ún.* levezetési (vagy produkciós, illetve átírási) szabályok *halmaza.*

P elemei $A \to \alpha$ alakúak, ahol $A \in V$ egy változó, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ egy változókból és a Σ elemeiből álló tetszőleges, véges hosszú sorozat.

1. Példa. *Legyen $V = \{A\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, a kezdő változó természetesen az A, a levezetési szabályok halmaza pedig*

$$P = \{A \to \mathtt{a}A\mathtt{b}, \quad A \to \varepsilon\}.$$

Ezzel meg is adtunk egy CF nyelvtant.

A nyelvtanok megadásánál sokszor nem írjuk ki az összes paramétert, csak a levezetési szabályokat soroljuk fel. Ha mást nem mondunk, akkor a szabályokban szereplő kisbetűk a Σ elemei, a nagybetűk a változók, az első szabály bal oldala a kezdő változó. Továbbá azok a szabályok, melyeknek a bal oldalán ugyanaz áll, összevonhatóak, függőleges vonallal választjuk el a különböző jobb oldalakat. Ebben a formában az előző nyelvtan így néz ki:

$$A \to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \varepsilon$$

Amikor egy szót akarunk megkapni, a kezdő szimbólumból indulunk ki, és minden lépésben az egyik változót helyettesítjük egy hozzá tartozó szabály jobb oldalával. A cél, hogy végül egy olyan sorozatot kapjunk, amiben már nincs változó. Formálisabban:

2. Definíció. *Egy $G = (V, \Sigma, S, P)$ nyelvtannál* levezetés *alatt egy olyan*

$$\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n$$

véges hosszú sorozatot értünk ($n \geq 0$), melyben $\gamma_0 = S$, továbbá $\gamma_i \in (V \cup \Sigma)^*$, és mindegyik γ_{i+1} megkapható γ_i-ből egy levezetési szabály alkalmazásával. Ez azt jelenti, hogy minden $0 \leq i < n$ esetén γ_i felírható $\gamma_i = \delta_1 A \delta_2$ alakban, ahol $\delta_1, \delta_2 \in (V \cup \Sigma)^*$ és $A \in V$ úgy, hogy $\gamma_{i+1} = \delta_1 \alpha \delta_2$ ahol $A \to \alpha$ egy P-hez tartozó levezetési szabály.

2. Példa. *Az előző nyelvtan esetén egy levezetés pl. az alábbi*

$$A \Rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{aa}A\mathtt{bb} \Rightarrow \mathtt{aaa}A\mathtt{bbb} \Rightarrow \mathtt{aaabbb}$$

(Az utolsó lépésben keletkezett ε üres részszót nem tüntettük fel a kapott szó közepén, hiszen ez itt nem befolyásolja, hogy mi is a szó.) Az így levezetett szó az aaabbb.

Könnyű látni, hogy ebből a nyelvtanból pontosan azok a $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ feletti szavak vezethetők le, amelyek $\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ alakúak ($n \geq 0$).

1. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a példában szereplő nyelvtan egy nem reguláris nyelvet határoz meg!*

A levezetések közül azok lesznek számunkra érdekesek, amelyekben a kezdő változóból indulva végül egy olyan karaktersorozathoz jutunk, amiben már nincsenek változók.

3. Definíció. *A $G = (V, \Sigma, S, P)$ nyelvtan által* generált $L(G)$ nyelv *azokból a $w \in \Sigma^*$ szavakból áll, melyekhez valamilyen $n \geq 0$ számra van olyan $S \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n$ levezetés, amiben $\gamma_n = w$*

2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ha egy levezetés során eljutunk egy $w \in \Sigma^*$ szóhoz, akkor a levezetés tovább már biztos nem folytatható, mivel w nem tartalmaz változót, ilyenkor már egyetlen szabály sem alkalmazható.*

3. Példa. *Tekintsük az alábbi nyelvtant!*

$$S \rightarrow \mathtt{a}S \mid \mathtt{b}S \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b}$$

Itt tehát az egyetlen változó az S, az ábécé az $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. A nyelvtanból levezethető pl. az ab *szó:*

$$S \Rightarrow \mathtt{a}S \Rightarrow \mathtt{ab}$$

Az is látszik, hogy a nyelvtan által generált nyelv $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$-ból az összes nem üres szót tartalmazza, azaz $L = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \setminus \{\varepsilon\}$. Ez azért igaz, mert egy tetszőleges, legalább 1 hosszú $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ szónak elölről kezdve egymás után tudjuk generálni a karaktereit: amíg nem az utolsó karakterről van szó, addig az vagy az első vagy a második szabállyal, az utolsó karakter pedig a 3. vagy a 4. szabállyal állítható elő.

1. Feladat. *Mely szavakból áll az alábbi nyelvtan által generált nyelv?*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathtt{a}T\mathtt{a} \mid \mathtt{b}T\mathtt{b} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \\ T &\rightarrow \mathtt{a}T \mid \mathtt{b}T \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Megoldás: Jelölje L azt a nyelvet, ami azokból a nem üres szavakból áll, melyekben az első karakter megegyezik az utolsóval. Látszik, hogy S-ből csak ilyen szavak vezethetők le, azaz ha $L(G)$ jelöli a generált nyelvet, akkor $L(G) \subseteq L$. Megmutatjuk, hogy itt egyenlőség van, azaz hogy minden L-beli szó levezethető.

Ehhez vegyük észre, hogy T-ből minden a és b betűkből álló sorozat előállítható az előző példához hasonlóan. Az S szabályai lehetővé teszik, hogy a szó első és utolsó karakterét generáljuk. Ha 1-nél hosszabb L-beli szót akarunk, akkor ez a két karakter között levő részszót a T-ből elő tudjuk állítani. $\square$

2. Feladat. *Legyen $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ és L álljon azokból a szavakból, melyekben az* a *betűk száma megegyezik a* b *betűk számával. Adjunk olyan G nyelvtant, amire $L(G) = L$.*

Megoldás: Egy lehetséges megoldás: $S \rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b}S \mid \mathtt{b}S\mathtt{a}S \mid \varepsilon$

Ahhoz, hogy ez valóban jó nyelvtan, először is vegyük észre, hogy minden esetben, amikor valamelyik szabályt alkalmazzuk, ugyanannyi $\mathtt{a}$-t generálunk, mint ahány $\mathtt{b}$-t ezért $L(G) \subseteq L$.

Azt kell még megmutatni, hogy minden $w \in L$ szó levezethető a nyelvtanból. Ezt a w hossza szerinti indukcióval látjuk be. Nyilván ez igaz a 0 hosszú $w = \varepsilon$ szóra. Egy hosszú szó nincs az L nyelvben. A kettő hosszú szavakra is könnyű látni, mert vagy az első vagy a második szabály egyszeri alkalmazása után a harmadik szabályt kétszer használva megkaphatjuk a w szót.

Tegyük fel, hogy L legfeljebb k hosszú szavairól már tudjuk, hogy levezethetők és legyen $|w| = k+1$. Több eset lehetséges: amennyiben $w = \mathtt{a}w'\mathtt{b}$, akkor $w' \in L$ és ebben az esetben az $S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b}S$ kezdés után S első előfordulásából, az indukciós feltevés szerint w' levezethető. A második S betűre az $S \to \varepsilon$ szabályt alkalmazva megkapjuk a w szót.

Hasonlóan járhatunk el, amennyiben $w = \mathtt{b}w'\mathtt{a}$.

Ha viszont w első és utolsó betűje megegyezik, és ez a betű mondjuk $\mathtt{a}$, akkor vegyük w-nek egy legrövidebb nem üres kezdőszeletét, amiben ugyanannyi $\mathtt{a}$ van mint $\mathtt{b}$. Ilyen biztos van, hiszen a teljes szóban ugyanannyi van mindkét betűből. Legyen ez x és $w = xy$. Ekkor a választásunk miatt $x \in L$, amiből $y \in L$ is következik. Másrészt x, mivel $\mathtt{a}$-val kezdődött, ezért $\mathtt{b}$-re végződik, azaz $x = \mathtt{a}z\mathtt{b}$ alakú, ahol $z \in L$. Egy ilyen w-re jó levezetést kapunk, ha az $S \Rightarrow \mathtt{a}S\mathtt{b}S$ lépés után az első S-ből a z-t, a másodikból az y-t vezetjük le (ami az indukciós feltevés miatt lehetséges).

Hasonlóan járhatunk el akkor is, amikor w első betűje $\mathtt{b}$, csak ilyenkor a levezetés az $S \Rightarrow \mathtt{b}S\mathtt{a}S$ szabállyal indul.

(Valójában az első két esetre nincs is szükség. Ha a szó $\mathtt{a}$-val kezdődik, és x a legrövidebb kezdőszelet, amiben ugyanannyi van mindkét betűből, akkor az mindig igaz, hogy $w = xy = \mathtt{a}z\mathtt{b}y$. és $z, y \in L$, de az előfordulhat, hogy y az üres szó, ami viszont a levezetést nem zavarja.) $\square$

Nézzünk egy kicsit bonyolultabb nyelvtant!

4. Példa.

$$R \to XRX \mid S \tag{1-2}$$
$$S \to \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T\mathtt{a} \tag{3-4}$$
$$T \to XTX \mid X \mid \varepsilon \tag{5-7}$$
$$X \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \tag{8-9}$$

Ez is környezetfüggetlen nyelvtan, ahol a kezdő változó az R. Az alábbi levezetésben, azért, hogy könnyebb legyen követni, az aláhúzott rész jelöli a következőként alkalmazott szabály bal oldalát, a nyíl feletti szám a szabály sorszámát.

$$\begin{aligned} R &\stackrel{1}{\Rightarrow} X\underline{R}X \stackrel{1}{\Rightarrow} XX\underline{R}XX \stackrel{2}{\Rightarrow} \underline{X}XSXX \stackrel{8}{\Rightarrow} \mathtt{a}\underline{X}SXX \stackrel{9}{\Rightarrow} \mathtt{ab}S\underline{X}X \\ &\stackrel{8}{\Rightarrow} \mathtt{ab}S\mathtt{a}\underline{X} \stackrel{8}{\Rightarrow} \mathtt{ab}\underline{S}\mathtt{aa} \stackrel{3}{\Rightarrow} \mathtt{aba}\underline{T}\mathtt{baa} \stackrel{5}{\Rightarrow} \mathtt{aba}X\underline{T}X\mathtt{baa} \stackrel{7}{\Rightarrow} \mathtt{aba}\underline{X}X\mathtt{baa} \\ &\stackrel{9}{\Rightarrow} \mathtt{abab}\underline{X}\mathtt{baa} \stackrel{9}{\Rightarrow} \mathtt{ababbbaa} \end{aligned}$$

Tehát a kapott szó $\mathtt{ababbbaa} \in L(G)$.

A fenti levezetés során több választásunk is volt, hogy melyik változót melyik szabály alapján helyettesítsük.

2. Levezetési fa, egyértelműség

Egy levezetés sokszor jobban áttekinthető ha a lépéseket egy fába rendezzük.

4. Definíció. *Legyen G egy környezetfüggetlen nyelvtan és x egy szó. Az x* levezetési fája *G-ben egy gyökeres fa, melyben*

- *a gyökér a kezdő változóval,*
- *minden nem levél csúcs egy változóval,*
- *minden levél Σ egy elemével vagy ε-nal van címkézve.*
- *Ha egy A csúcs gyerekei balról jobbra olvasva $B_1, B_2, \ldots, B_k$, akkor a nyelvtannak van $A \to B_1 B_2 \ldots B_k$ szabálya. (Itt $B_i \in \Sigma \cup V \cup \{\varepsilon\}$.)*
- *A levelekbeli karakterek balról jobbra olvasva éppen az x szót adják.*

A definícióból világos, hogy egy $x \in L(G)$ szó tetszőleges levezetéséből lehet levezetési fát készíteni, és a levezetési fából is kiolvasható legalább egy levezetés.

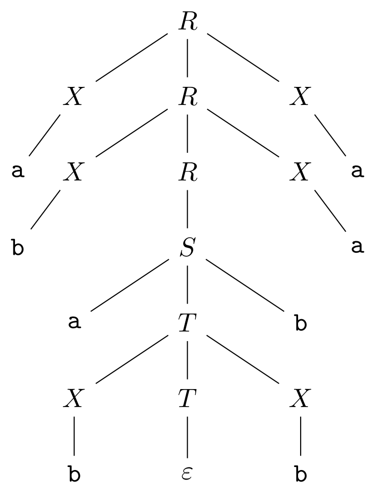
Fontos azonban megjegyezni, hogy míg a levezetés egyértelműen meghatározza a fát, visszafelé ez nem igaz, általában egy levezetési fából ugyanannak a szónak több levezetése is kiolvasható, hiszen például választhatunk, milyen sorrendben lépjünk tovább az egyes ágakon.

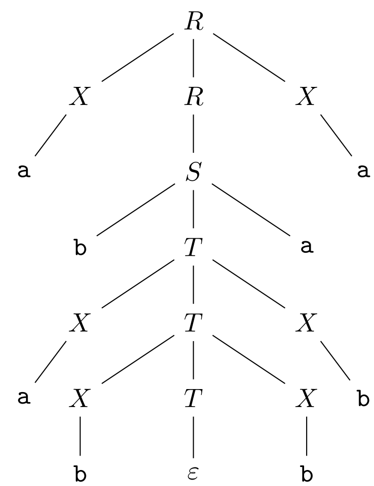
5. Definíció. *Egy $x \in L(G)$ szó* bal-levezetése *egy olyan levezetés, amikor minden lépésben a γ_i elejéhez legközelebbi változót helyettesítjük egy megfelelő nyelvtani szabály alapján.*

Erre már igaz, hogy egy levezetési fából egyetlen bal-levezetés olvasható ki.

5. Példa. *Az előző példában leírt levezetéshez tartozó levezetési fa. Ebből többféle levezetés is leolvasható, a bal-levezetés szabályai sorrendben: 1, 8, 1, 9, 2, 3, 5, 9, 7, 9, 8, 8.*

Jobb oldalt egy ugyanehhez a szóhoz tartozó másik levezetési fa látható.





6. Definíció. *Egy $w \in L(G)$ szó* egyértelműen levezethető *a G nyelvtanból, ha G-ben egyetlen levezetési fája van.*

A G nyelvtan egyértelmű*, ha G-ből minden $w \in L(G)$ szó egyértelműen levezethető.*

Az L nyelv egyértelmű*, ha létezik egyértelmű nyelvtana.*

Ezek szerint az előző példabeli szó nem egyértelműen levezethető, hiszen két különböző levezetési fája is van. Így persze a nyelvtan sem egyértelmű.

3. Megjegyzés. *Az egyértelműen levezethetőség fenti definíciója ekvivalens azzal, hogy a szó bal-levezetése egyértelmű.*

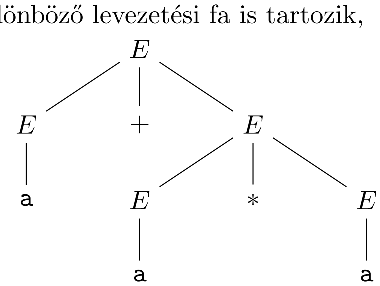
Lássunk most egy fontos példát, az aritmetikai kifejezések nyelvét. Csak összeadást és szorzást fogunk benne használni, de kiegészíthető további műveletekkel is.

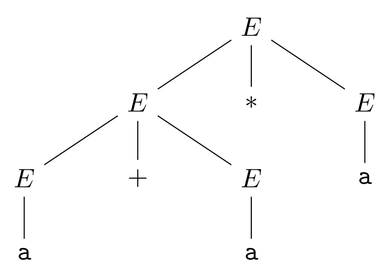
Az *egyszerű aritmetikai nyelvtan*:

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathtt{a} \tag{1}$$

Itt E az egyetlen változó, az ábécé elemei pedig $+$, $*$, $\mathtt{a}$, valamint a nyitó és csukó zárójel.

Ez egy nem egyértelmű nyelvtan, hiszen például az $\mathtt{a} + \mathtt{a} * \mathtt{a}$ kifejezéshez két különböző levezetési fa is tartozik,





4. Megjegyzés. *Ha erre a két fára nem mint levezetési fákra, hanem mint a kifejezés kiértékelésének módját megadó fákra gondolunk, akkor látszik, hogy míg az első megfelel az aritmetikai kifejezések szokásos kiértékelésének (előbb a szorzást végezzük el, utána az összeadást) a második ,,rossz sorrendben" végzi a műveleteket.*

1. Tétel. *Az előbb látott (1) egyszerű aritmetikai nyelvtan nem egyértelmű, de az általa generált nyelv egy egyértelmű nyelv.*

Bizonyítás vázlat: Jelölje G az egyszerű aritmetikai nyelvtant. Az előbb már láttuk, hogy G nem egyértelmű. A nyelv egyértelműségéhez mutatnunk kell egy másik G' nyelvtant, ami egyértelmű nyelvtant és amire $L(G') = L(G)$. Legyen G' a következő:

$$\begin{aligned} E &\to E + T \mid T \\ T &\to T * F \mid F \\ F &\to (E) \mid \mathtt{a} \end{aligned}$$

Világos, hogy a G' nyelvtannal levezethető aritmetikai kifejezések levezethetők az eredeti nyelvtanból is.

Azt kell megmutatni, hogy ha $w \in L(G)$, akkor $w \in L(G')$ is teljesül, sőt a G'-beli levezetési fája egyértelmű.

Ezt a w hossza szerinti indukcióval mutathatjuk meg. Ha $|w| = 1$, akkor csak $w = \mathtt{a}$ lehet, és ez megkapható G'-ben az $E \Rightarrow T \Rightarrow F \Rightarrow \mathtt{a}$ levezetéssel, és könnyű látni, hogy másként nem.

Hosszabb szavakra azt kell észrevenni, hogy ha vannak zárójelen kívüli $+$ jelek, akkor először ezeket kell generálni (sorrendben visszafelé) az első szabály segítségével, utána a zárójelen kívüli $*$ jeleket, majd a zárójelekben levő kifejezéseket.

$\square$

5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ebben a módosított nyelvtanban ha a levezetési fát kiértékelési fának tekintjük, akkor a műveletek sorrendje a szokásos lesz.*

. . . .