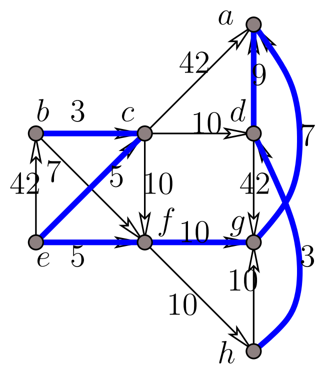
A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2023. 11. 02.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

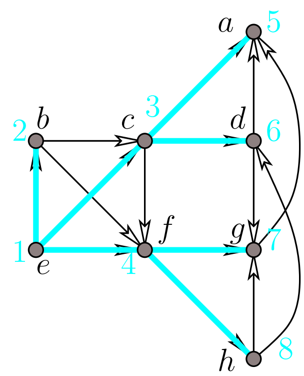
1. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Határozzuk meg $p = 42$ mellett a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának költségét. Lehetséges-e egyetlen 10 költségű él költségét úgy 7-re csökkenteni, hogy az így kapott költségfüggvényre a minimális költségű feszítőfa költsége ugyanannyi maradjon, mint amennyi az eredeti költségfüggvény esetén volt?



Az órán tanult Kruskal-algoritmus segítségével elkészítünk egy mkffát az élek bevételéről növekvő költség szerint egyenként döntve. Az ábra egy ilyen F fát mutat. Az F ffa a költsége 42. (7 pont)

Ha a cf él 10-es költségét 7-re csökkentjük, akkor a Kruskal-algoritmus ugyanezt a feszítőfát fogja megtalálni, ezért a feladat második részének kérdésére „igen” a válasz. (3 pont)

2. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Futtassuk le G egy szélességi bejárását az e csúcsból indítva. Határozzuk meg, hogy ebben a bejárásban milyen sorrendben fejeztük be a c, d, f és g csúcsokat. Határozzuk meg e négy csúcs összes olyan sorrendjét ami egy e-ből indított BFS bejárás befejezési sorrendjéből adódhat. (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)



Az ábrán egy e-ből indított BFS outputja látható, megjelöltük a bejárás fáját és az egyes csúcsok befejezési számait. A kérdezett csúcsok befejezésének sorrendje a konkrét lefutás esetén c, f, d, g. (4 pont)

Tanultuk, hogy BFS esetén az elérési sorrend és a befejezési sorrend megegyezik, így az említett csúcsok elérésének lehetséges sorrendjeit kell meghatározni. (1 pont)

A szélességi bejárás során minél később érünk el egy csúcsot, annál távolabb van az adott csúcs a gyökértől. Mivel G-ben f és c 1 távolságra vannak e-től, d és g pedig 2 távolságra, ezért az előbbi két csúcs bármelyikének elérése biztosan megelőzi az utóbbi csúcsok bármelyikének elérését. (2 pont)

Ha a szélességi bejárás során c-t hamarabb érjük el, mint f-et, akkor c gyerekeit is hamarabb érjük el f gyerekeinél. Mivel a d csúcs szülője a BFS-fában mindenképpen c, és g-é pedig bizonyosan f, ezért a kérdezett négy csúcsot c, f, d, g sorrendben éri el (és fejezi be) a BFS. Ha pedig a szélességi bejárás során f-et c előtt érjük el, akkor f gyerekeit megelőzik c gyerekeit, így ebben az esetben a kérdezett sorrend f, c, g, d. (2 pont)

Könnyen látható, hogy a BFS algoritmust e-ből indítva mindkét sorrend megkapható, ezért a feladatban kérdezett lehetséges sorrendek halmaza pontosan a két fent említett sorrendből áll. (1 pont)

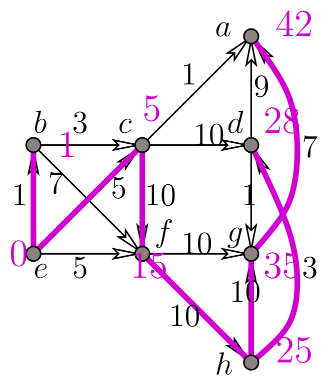
3. Határozzuk meg $p = 1$-re az ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket!

A problémához tartozó gráf csúcsainak topologikus sorrendjét megkaphatjuk az órán megismert forrástörléses módszerrel. Így adódik a e, b, c, f, h, d, g, a sorrend. (2 pont)

Ebben a sorrendben meghatározva az egyes csúcsokhoz tartozó legkorábbi kezdési időpontokat, az ábrán az egyes csúcsok mellett látható értékeket kapjuk. Egyúttal lilával megjelöljük azokat az éleket, amelyek az egyes csúcsok mellé írt számokat meghatározzák. (4 pont)

A teljes projekthez szükséges minimális végrehajtási időt tehát az a csúcshoz tartozó 42-es érték határozza meg. (1 pont)

Ezért a krtikus út hossza 42, és minden kritikus út az a csúcsban végződik, és a lila éleket használja. Ezért egyetlen kritikus út van, mégpedig az e, c, f, h, g, a. Ennek megfelelően ezen kritikus úton szereplő csúcsok a kritikus tevékenységek, a b és d tevékenységek pedig nem kritikusak. (3 pont)



4. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Legkevesebb hány élt kell törölni a G gráfból ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Euler-körsétája? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)

Az órán azt tanították, hogy az az Euler-körséta szükséges és elégséges feltétele, hogy a gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő legyen, és minden csúcs fokszáma páros legyen. (3 pont)

A G gráfban fellépő fokszámok az alábbiak: $3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5$, azaz hat páratlan fokú csúcsa van G-nek. (1 pont)

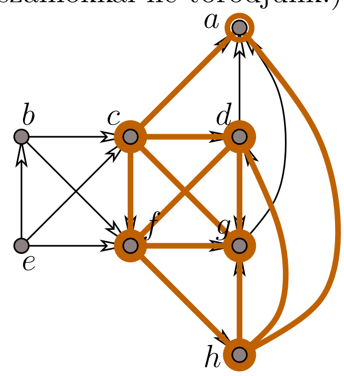
Minden él törlése két csúcs fokszámát csökkenti 1-gyel, ezért minden él törlése legfeljebb 2-vel csökkenti a páratlan fokú csúcsok számát. (2 pont)

Ezért legalább 3 él törlése szükséges ahhoz, hogy a kapott gráfnak Euler-körsétája legyen. (1 pont)

Ha G-ből töröljük a ac, be és fh éleket, akkor minden csúcs fokszáma páros lesz amellett, hogy a törlések után kapott gráf összefüggő marad. (2 pont)

Ezért 3 él törlése nem csupán szükséges, de elegendő is a kívánt cél eléréséhez, vagyis a feladat kérdésére „három" a helyes válasz. (1 pont)

5. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Síkbarajzolható-e az a G' gráf, amit G-ből az ah, cg és df élek behúzásával kapunk? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)



Ha mutatunk G'-nek egy topologikus K_5 részgráfját, akkor a tanultak szerint G' nem síkbarajzolható.

(E helyett hivatkozhatunk a Kuratowski-tételre is.) (3 pont)

A mellékelt ábra a kérdéses gráfot mutatja. (1 pont)

A megvastagított élek és a megjelölt csúcsok G' egy topologikus K_5 részgráfját ábrázolják. Tehát G' nem síkbarajzolható. (6 pont)

$\star$ Tegyük fel, hogy az F fának 101 csúcsa van és F leveleit pirosra színeztük. Legyen F' az a fa, amit F-ből a pirosra színezett csúcsok törlésével kapunk. Színezzük F' leveleit fehérre, és az ezután is színezetlen csúcsokat pedig zöldre. Tudjuk, hogy minden zöld csúcsa negyedfokú F'-ben és a fehér csúcsok száma 21-gyel több a zöld csúcsokénál. Hány piros csúcsa van F-nek?

Jelölje p, f, z rendre a piros, fehér ill. zöld csúcsok számát. A cél p meghatározása. Tudjuk, hogy F csúcsainak száma $p + f + z = 101$, valamint, hogy $f = z + 21$. (2 pont)

Az F' fának $f + z$ csúcsa van, így a tanultak miatt élei száma $f + z - 1$. (2 pont)

A KFL miatt ekkor $4z + f = \sum_{v \in V(F')} d(v) = 2|E(F')| = 2f + 2z - 2$. (3 pont)

Innen $f = 2z + 2$ adódik. A korábbi $f = z + 21$ kifejezést behelyettesítve kapjuk, hogy $z + 21 = 2z + 2$, azaz $z = 19$. (1 pont)

Ekkor $f = z + 21 = 40$, (1 pont)

és $p = 101 - f - z = 101 - 40 - 19 = 42$. Ez tehát a válasz a feladat kérdésére. (1 pont)

Nem követeljük meg annak az igazolását, hogy létezik a feladatban leírt tulajdonsággokkal rendelkező F fa. Egyébként könnyű ilyet konstruálni: vegyünk pl. egy 19 zöld csúcsból álló utat, ezen zöld csúcsokra ragasszunk fehér leveleket úgy, hogy minden zöld csúcs fokszáma 4 legyen. Minden fehér levélre ragasszunk egy-egy piros levelet, majd még egy tetszőleges fehér csúcsra további két levelet, és már meg is kaptunk egy ilyen fát. Ha valaki az érdemi bizonyításból nem ér el értékelhető eredményt, de talál egy konkrét F fát, amire teljesülnek a feladatbeli tulajdonságok, és megállapítja, hogy F-nek 42 levele van, arra 1 pontot adhatunk.

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2023. 11. 30.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e olyan megoldása az alábbi egyenletrendszernek, ahol $x_3 = 4$? Ha igen, akkor egy ilyen megoldás mellett milyen értéket vehet fel az x_1x_2 szorzat?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 27 \\ 4x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= 42 \end{aligned}$$

Kibővített együtthatómátrixot készítünk, és azon végzünk ESÁ-okat mindaddig, míg RLA mátrixot nem kapunk: (2 pont)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&-1&0&9\\ 3&1&1&-2&27\\ 4&6&-7&3&42 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&-1&0&9\\ 0&-2&4&-2&0\\ 0&2&-3&3&6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&-1&0&9\\ 0&1&-2&1&0\\ 0&2&-3&3&6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&-1&0&9\\ 0&1&-2&1&0\\ 0&0&1&1&6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&15\\ 0&1&0&3&12\\ 0&0&1&1&6 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&-2&3\\ 0&1&0&3&12\\ 0&0&1&1&6 \end{array}\right)$$

(4 pont)

Ezek szerint a megoldás $x_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_1 = 3 + 2x_4$, $x_2 = 12 - 3x_4$ ill. $x_3 = 6 - x_4$. (2 pont)

Ekkor $x_3 = 4 \iff 6 - x_4 = 4 \iff x_4 = 2$. Ezért pontosan egy olyan megoldása van az egyenletrendszernek, ahol $x_3 = 4$, így az első kérdésre igenlő a válasz. (1 pont)

Ennél a megoldásnál $x_1 = 7, x_2 = 6$, azaz $x_1x_2 = 42$ a válasz a második kérdésre. (1 pont)

Avagy.

Ha úgy próbáljuk megoldani az egyenletrendszert, hogy rögzítjük az $x_3 = 4$ értéket, akkor is minden kérdezett megoldást megkapunk, és még számolni is kevesebbet kell. (3 pont)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&13\\ 3&1&-2&23\\ 4&6&3&70 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&13\\ 0&-2&-2&-16\\ 0&2&3&18 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&13\\ 0&1&1&8\\ 0&2&3&18 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&13\\ 0&1&1&8\\ 0&0&1&2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&13\\ 0&1&0&6\\ 0&0&1&2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&7\\ 0&1&0&6\\ 0&0&1&2 \end{array}\right)$$

(4 pont)

Az $x_3 = 4$ mellett kapott egyetlen megoldás az $x_1 = 7, x_2 = 6, x_4 = 2$, tehát az első kérdésre „igen” a válasz. (2 pont)

Ekkor pedig $x_1x_2 = 42$ az egyetlen lehetséges érték. (1 pont)

2. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok az $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ oszlopvektorok, amelyekre x_1, x_2, x_3, x_4 vagy x_2, x_3, x_4, x_1 számtani sorozatot alkot?

Vektorok egy V halmaza pontosan akkor alkot alteret, ha V zárt a vektorösszeadásra és a skalárral szorzásra. (1 pont)

Úgy igazoljuk, hogy nem alkot alteret a kérdezett vektorhalmaz, hogy megmutatjuk, hogy a vektorösszeadás kivezet ebből halmazból. (4 pont)

Világos, hogy pl az $\underline{x} = (0, 1, 2, 3)^\top$ és az $\underline{y} = (3, 0, 1, 2)^\top$ vektorok benne vannak a kérdezett halmazban, ám összegük $\underline{x} + \underline{y} = (3, 1, 3, 5)^\top$ nincs benne, tehát a vektorösszeadás kivezet a halmazból, nem alkotnak alteret a kérdezett vektorok. (5 pont)

Bár ez közvetlenül nem járul hozzá egy helyes megoldáshoz, de ha egy megoldó (hiánytalanul) megmutatja, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda v \in V$ is teljesül (ahol V a kérdezett vektorhalmaz), akkor ezért 4 pontot kaphat; ha pedig a megoldásban nyoma van annak, hogy az összeadásra való zártságot is elkezdi vizsgálni (és nem csak felírja), akkor ezért további 1 pont adható.

3. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{u} = (-1, 2, 4, 8)^\top$, $\underline{v} = (1, 3, 9, 27)^\top$ és $\underline{w} = (4, 2, 42, 24)^\top$ oszlopvektorok?

Tanultuk, hogy $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ és $\underline{e}_4$ vektorok alkotják a standard bázist. (1 pont)

Ezek a vektorok tehát $\mathbb{R}^4$-ben lineárisan független rendszert alkotnak. (2 pont)

A tanult FG-egyenlőtlenség szerint tetszőleges V altér generátorrendszerének mérete legalább akkora, mint az altér bármely lineárisan független rendszerének mérete. (4 pont)
Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^4$ bármely generátorrendszerének legalább 4 vektort kell tartalmaznia. (2 pont)
Ezek szerint a kérdezett három vektor bizonyosan nem alkot $\mathbb{R}^4$-ben generátorrendszert. (1 pont)

Az is tökéletes megoldás, ha valaki kimutatja egy alkalmas $\mathbb{R}^4$-beli vektorról (pl $\underline{e}_1$-ről), hogy nem generálja a három megadott vektor. Ezt pedig a szóban forgó vektorok alkotta mátrix LA hozásával lehet könnyen látni.

4. Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 10 \\ 9 & 81 & 100 \end{vmatrix}$ determináns értékét!

Elemi sorekvivalens átalakítások segítségével LA mátrixot képezünk, (1 pont)
ennek során sor konstansszorosának másik sorhoz történő hozzáadásakor/levonásakor a determináns nem változik, (3 pont)
LA mátrix determinánsa pedig a főátlóbeli elemek szorzata. (3 pont)
A konrét számolás: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 10 \\ 9 & 81 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 72 & 91 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 42$ (3 pont)

Természetesen számos más, elméletileg helyes módszerrel is ki lehet számítani a determinánst. A Sarrus-szabály elhangzott a délutáni előadáson, ezért ha azt valaki helyesen hivatkozza és használja, akkor is teljes pontszámot kap. Ha csak simán a 6-féle bástyaelhelyezéssel számol, akkor indoklásra szorul, hogy mi is az egyes kifejtési tagok előjele.

5. Egy ásatáson feltárt kőtáblán egy $AB = C$ mátrixszorzás szerepel, de a $\boxed{?}$-t tartalmazó mezők nem olvashatók ki, csak az alábbiak látszanak: $A = \begin{pmatrix} \boxed{?} & -2 \\ \boxed{?} & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \boxed{?} & 1 & \boxed{?} \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 12 & \boxed{?} & -11 \\ -1 & -2 & \boxed{\mathbf{?}} \end{pmatrix}$.
Határozzuk meg a C mátrix jobb alsó elemét!

Ha rendre A_i, B^j és C_i^j jelöli az A mátrix i-dik sorát, a B mátrix j-dik oszlopát ill. a C mátrix i-dik sorának j-dik elemét, akkor $C_i^j = A_i \cdot B^j$, azaz a C mátrix elemei az A mátrix megfelelő sorának és a B mátrix megfelelő oszlopának skalárszozataként kaphatók. (1 pont)
A C_2^2 elem miatt az A mátrix második sorának első eleme 7, (1 pont)
A C_2^1 elem miatt a B mátrix második sorának első eleme -3, (2 pont)
A C_1^1 elem miatt az A mátrix első sorának első eleme 3, (2 pont)
Ekkor a C_1^3 elem miatt a B mátrix második sorának harmadik eleme 7, (2 pont)
ezért $C_1^3 = A_1 \cdot B^3 = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 42$ a válasz a kérdésre. (2 pont)

Egyébként így néz ki kőtáblára eredetileg felírt mátrixszorzás:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \mathbf{-3} & 1 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -2 \\ \mathbf{7} & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & \mathbf{-5} & -11 \\ -1 & -2 & \mathbf{42} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boxed{\star}$ Legyen $f(p,q) := \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & q \\ p & 1 & 42 & 3 \\ 8 & 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Rögzíthető-e a q paraméter értéke úgy, hogy $f(p,q)$ ne függjön p-től, azaz $f(p_1,q) = f(p_2,q)$ teljesüljön tetszőleges p_1, p_2 esetén? Ha igen, akkor adjuk meg az összes ilyen q paraméterértéket!

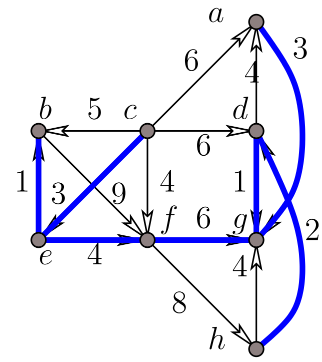
Az első oszlop (vagy a harmadik sor) szerinti kifejtésből az látszik, hogy $f(p)$ pontosan akkor nem függ p-től ha a p-hez tartozó előjeles aldetermináns értéke 0. (4 pont)
Konkrétan ez azt jelenti, hogy $0 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & q \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, (2 pont)
amit az utosó oszlop szerint kifejtve $0 = -q\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -q \cdot (7-6) - 1 \cdot (42-0) = -q - 42$ adódik. (2 pont)
Ezek szerint a feladat kérdésére igenlő a válasz, a q paraméter keresett értéke pedig egyedül a $q = -42$. (2 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2023. 11. 20.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

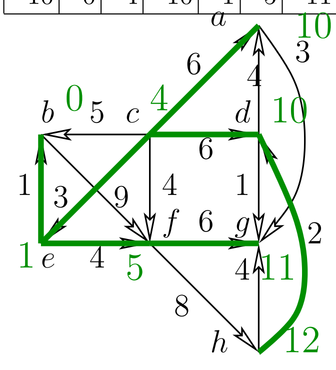
1. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Határozzuk meg a G gráf egy minimális költségű feszítőfáját, és dokumentáljuk az algoritmus futását. Lehetséges-e egy 6 költségű él költségét 22-re növelni úgy, hogy az új költségfüggvény szerint minimális költségű feszítőfa költsége ugyanannyi maradjon, mint amennyi az eredeti költségfüggvény esetén volt?



Az órán tanult Kruskal-algoritmus segítségével elkészítünk egy mkffát az élek bevételéről növekvő költség szerint egyenként döntve, egy élt akkor bevéve a feszítőfába, ha nem alkot kört korábban bevett élekkel. Az ábra egy ilyen F fát mutat. Az F ffa a költsége 20. (7 pont)
Ha a ca él 6-os költségét 22-re növeljük, akkor az imént kapott fa költsége 20 marad, továbbá a növelés hatására egyetlen feszítőfa költsége sem csökken. Ezért F minimális költségű feszítőfa lesz a költségnövelés után is, így a feladat második részének kérdésére „igen” a válasz. (3 pont)

2. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Futtassuk le a G gráfra a Dijkstra-algoritmust a b gyökérből. Határozzuk meg a c, d, f és g csúcsok U_i (KÉSZ) halmazba kerülésének összes lehetséges egymás közti sorrendjét egy b-ből indított Dijkstra algoritmus lefutásakor.

a	b	c	d	e	f	g	h
∞	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	0	5	∞	$\boxed{1}$	9	∞	∞
∞	0	$\boxed{4}$	∞	1	5	∞	∞
10	0	4	10	1	$\boxed{5}$	∞	∞
$\boxed{10}$	0	4	10	1	5	11	13
10	0	4	$\boxed{10}$	1	5	11	13
10	0	4	10	1	5	$\boxed{11}$	12
10	0	4	10	1	5	11	$\boxed{12}$



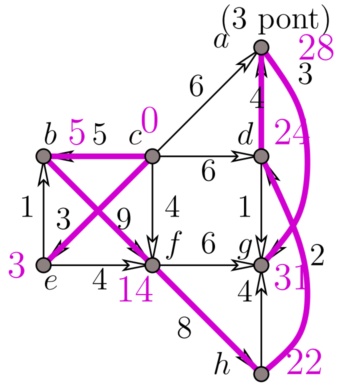
Futtassuk le G-re a Dijkstra-algoritmust a b gyökérből. A (b, ℓ)-felső becslés változását a mellékelt táblázat tartalmazza, valamint az ábrán megjelöltük a végső becslésértéket beállító éleket, (7 pont)
amelyek a b gyökérből egy legrövidebb utak fáját alkotják. (0 pont)
Az órán azt tanították , hogy a Dijkstra-algoritmus során az egyes a KÉSZ halmazba kerülő csúcsok gyökértől mért távolsága monoton növekszik. (2 pont)
Mivel a vizsgált négy csúcsra ezek a távolságok páronként különbözők, ezért csupán egyetlenegy lehetséges sorrendje van a feldolgozásuknak, nevezetesen a c, f, d, g. (1 pont)

Az utolsó 3 pont úgy is megszerezhető, ha a hallgató rámutat, hogy a Dijkstra-algoritmus különböző futtatásai csupán annyiban térhetnek el egymástól, hogy az egymást követő a és d csúcsokat milyen sorrendben vesszük a KÉSZ halmazba, de ez nem érinti a kérdezett csúcsok sorrendjét.

3. Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét! Elérhető-e a cd élre írt szám megváltoztatásával, hogy egy korábban kritikus tevékenység a változtatás után ne legyen kritikus?

A G csúcsainak topologikus sorrendjét megkaphatjuk az órán megismert forrástörléses módszerrel. Így adódik a c, e, b, f, h, d, a, g sorrend. (3 pont)
Ebben a sorrendben meghatározva az egyes csúcsokhoz tartozó legkorábbi kezdési időpontokat, az

ábrán az egyes csúcsok mellett látható értékeket kapjuk. Egyúttal lilával megjelöljük azokat az éleket, amelyek az egyes csúcsok mellé írt számokat meghatározzák. (3 pont)



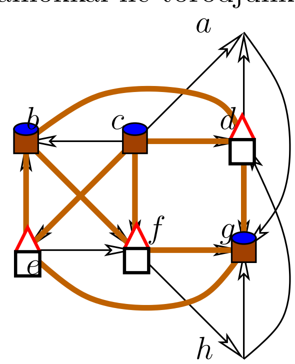
A teljes projekthez szükséges minimális végrehajtási időt tehát a g csúcshoz tartozó 31-es érték határozza meg. (1 pont)
Egyetlen kritikus út van, mégpedig $cbfhdag$. Ennek megfelelően az e tevékenység kivételével minden tevékenység kritikus. (2 pont)
Ha a cd élre írt szám 24-nél több lenne, akkor ezáltal d legkorábbi kezdési időpontja megnőne az a és g csúcsokkal együtt. Ezáltal kizárólag $cdag$ lesz kritikus út, és a b, f, h tevékenységek pedig nem lesznek kritikusak. Tehát a feladat második kérdésére tehát igenlő a válasz. (1 pont)

4. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Van-e G-nek Hamilton-köre? Ha van, akkor legkevesebb hány élt kell törölni G-ből, hogy a kapott gráfnak ne legyen Hamilton-köre? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)

G-nek van Hamilton-köre, például a, c, b, e, f, h, g, d ezért a feladat első kérdésére „igen” a válasz. (4 pont)
Ha töröljük a be élt, akkor állítjuk, hogy az így kapott G' gráfnak nem lesz Hamilton-köre. (1 pont)
Ha ugyanis elhagyjuk G'-ből a c és f csúcsokat, akkor b és e izolált pontok lesznek, és az a, d, g, h csúcsok egy harmadik komponenst alkotnak. (2 pont)
A Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel tehát nem teljesül a G' gráfra, ezért G'-nek nincs Hamilton-köre. (2 pont)
Mivel 0 él törlése esetén még van G-nek Hamilton-köre, ezért a feladat második kérdésére „egy” a válasz. (1 pont)

Ha valaki a második kérdésre megállapítja, hogy egy harmadfokú csúcsból két élt törölve nem lesz Hamilton-kör, de a helyes választ nem találja meg, akkor erre a részre 1 pontot kaphat.

5. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Síkbarajzolható-e az a G' gráf, amit G-ből az bd és eg élek behúzásával kapunk? (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.)



Ha mutatunk G'-nek egy (topologikus) $K_{3,3}$ részgráfját, akkor a tanultak szerint G' nem síkbarajzolható. (3 pont)
A mellékelt ábra a kérdéses gráfot mutatja. (1 pont)
A megvastagított élek és a megjelölt csúcsok G' egy $K_{3,3}$ részgráfját ábrázolják. Tehát G' nem síkbarajzolható. (6 pont)
Az első rész helyett hivatkozhatunk a (helyesen kimondott) Kuratowski-tételre is.
Van egyébként topologikus K_5 is G-ben, pl a b, c, e, f és g csúcsok az a és d osztópontokkal ilyet alkotnak. Ennek a megtalálása is tökéletes bizonyíték.

$\boxed{\star}$ Legfeljebb hány csúcsa lehet egy olyan G gráfnak, amelynek 123 éle van, és minden élét ki lehet színezni a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére úgy, hogy G bármely két csúcsa között vezessen csupa piros, csupa fehér és csupa zöld élből álló út is?

Jelölje n a G gráf csúcsai számát. A megadott feltétel azt kívánja, hogy piros, a fehér és a zöld élek is egy-egy n-csúcsú összefüggő gráfot alkossanak. (2 pont)
Tudjuk, hogy minden összefüggő gráfnak van feszítőfája, (1 pont)
és bármely n-csúcsú gráf bármely feszítőfája pontosan $n-1$ élt tartalmaz. (2 pont)
Ezért a piros, fehér és zöld élek bármelyikéből legalább $n-1$ van, azaz G éleinek számára $123 \geq 3\cdot(n-1)$ teljesül. (2 pont)
Innen $n \leq 42$ adódik G csúcsszámára, a kérdezett maximális csúcsszám tehát nem lehet több 42-nél. (1 pont)

Ha egy 42-csúcsú út minden élé mellé behúzunk két további párhuzamos élt, és a párhuzamos élhármasokat nemzetiszínűre színezzük, akkor az így élszínezett G gráfra teljesülnek a feladatban leírt feltételek. (1 pont)
Ezért a keresett maximális csúcsszám legalább 42, amit ha a korábbi megállapításunkkal összevetünk, megállapíthatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz pontosan 42. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2023. 12. 13.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e olyan megoldása az alábbi egyenletrendszernek, ahol $x_3 = 2x_4 - 1$? Ha igen, akkor határozzuk meg az összes ilyen megoldást!

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Kibővített együtthatómátrixot készítünk, és azon végzünk ESÁ-okat mindaddig, míg RLA mátrixot nem kapunk: (2 pont)

$$\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 2&7&1&-3&6\\ 2&8&2&-3&5 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&2&2&1&-5 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&0&0&-1&3 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&0&0&1&-3 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&0&-1\\ 0&1&1&0&-1\\ 0&0&0&1&-3 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&0&-3&0&2\\ 0&1&1&0&-1\\ 0&0&0&1&-3 \end{array}$$

(4 pont)

Ezek szerint a megoldás $x_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $x_1 = 2 + 3x_3$, $x_2 = -1 - x_3$ ill. $x_4 = -3$. (2 pont)

Ha tehát $x_3 = 2x_4 - 1$, akkor $x_3 = -7$, és ennek megfelelően $x_1 = -19$, $x_2 = 6$ ill. $x_4 = -3$ adódik. (1 pont)

A feladat kérdésére tehát igenlő a válasz, és a fenti leírt az egyetlen szóba jövő megoldás. (1 pont)

Avagy.

Ha az $x_3 - 2x_4 = -1$ egyenlet hozzáadásával nyert egyenletrendszert oldjuk meg, akkor is korrekt választ kapunk a feladat kérdésére. (3 pont)

$$\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 2&7&1&-3&6\\ 2&8&2&-3&5\\ 0&0&1&-2&-1 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&2&2&1&-5\\ 0&0&1&-2&-1 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&0&0&-1&3\\ 0&0&1&-2&-1 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&0&1&-2&-1\\ 0&0&0&-1&3 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&-2&5\\ 0&1&1&1&-4\\ 0&0&1&-2&-1\\ 0&0&0&1&-3 \end{array} \mapsto$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1&3&0&0&-1\\ 0&1&1&0&-1\\ 0&0&1&0&-7\\ 0&0&0&1&-3 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&3&0&0&-1\\ 0&1&0&0&6\\ 0&0&1&0&-7\\ 0&0&0&1&-3 \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&-19\\ 0&1&0&0&6\\ 0&0&1&0&-7\\ 0&0&0&1&-3 \end{array}$$

(4 pont)

A feladatban leírt feltétel mellet pontosan egy megoldás kapott egyetlen megoldás létezik, mégpedig az $x_1 = -19$, $x_2 = 6$, $x_3 = -7$, $x_4 = -3$. (3 pont)

2. Altér-e $\mathbb{R}^3$-ban a $V = \{(x, y, z)^\top : x + y + 2z \geq 0\}$ vektorhalmaz?

A V részhalmaz pontosan akkor altér, ha sem az összeadás, sem a skalárral szorzás nem vezet ki belőle. (2 pont)

A konkrét V halmazból azonban kivezet a skalárral való szorzás, ugyanis $(1, 0, 0)^\top \in V$, azonban $-1 \cdot (1, 0, 0)^\top = (-1, 0, 0)^\top \notin V$, (7 pont)

ezért V nem altere $\mathbb{R}^3$-nak. (1 pont)

Ha valaki tudja, mi az altér (azaz megszerzi az első 2 pontot), és igazolja V összeadásra zárt tulajdonságát, akkor azért további 4 pontot kapható.

3. Döntsük el, hogy benne van-e a $\underline{z}$ vektor a $V := \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ vektortérben. Ha igen, akkor határozzuk meg z koordinátavektorát a V-nek egy, az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból választott valamely bázisában, ahol $\underline{u} = (1, 2, -1)^\top$, $\underline{v} = (-2, -3, 3)^\top$, $\underline{w} = (2, 1, -4)^\top$, és $\underline{z} = (-6, -5, 10)^\top$!

Azt kell eldöntenünk, hogy teljesül-e a $\underline{z} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ tulajdonság, és ha igen, akkor $\underline{z}$-t elő kell állítanunk egy, az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból választott bázis elemeinek lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Ehhez elkészítjük az $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z})$ mátrixot, és megvizsgáljuk, hogy az utolsó oszlop előáll-e az előtte álló oszlopok lineáris kombinációjaként. Ehhez ESÁ-okat hajtunk végre, és felhasználjuk, hogy egy ilyen lépés nem változtat az oszlopok közötti lineáris összefüggőségeken. (2 pont)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -4 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{(3 pont)}$$

A kapott RLA mátrix első három oszlopa lineárisan független és generálja az utolsót, (1 pont)
ezért $\underline{z} \in V$ (1 pont)
és a keresebb B bázist az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkotják. Ebben a bázisban a kérdezett koordinátavektor a kapott mátrix utolsó oszlopa: $[\underline{z}]_B = (-4, -2, -3)^\top$. (1 pont)

4. Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 1 & 2p-1 & 2 \\ 2 & 4p-1 & 1 \\ -1 & 1-2p & -1 \end{vmatrix}$ determináns értékét a p paraméter értékének függvényében!

Egy sor konstansszorosának hozzáadása/kivonása egy másik sorból nem változtat a determináns értékén, (2 pont)
valamint felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata. (2 pont)
így $\begin{vmatrix} 1 & 2p-1 & 2 \\ 2 & 4p-1 & 1 \\ -1 & 1-2p & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2p-1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. (6 pont)

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Van-e olyan C mátrix, amire $CA = B$ teljesül? Ha igen, akkor határozzunk meg egy ilyen C mátrixot!

Az A mátrix 3-dik oszlopa megegyezik az A mátrix első és második oszlopának összegével. (2 pont)
Ezért ha értelmes a CA mátrixszorzás, akkor a CA szorzatmátrix minden sora az A mátrix sorainak lineáris kombinációja. Ezért az A mátrix fenti tulajdonságának a CA mátrixra is teljesülnie kell. (5 pont)
Mivel azonban a B mátrix 3-dik oszlopa nem egyezik meg a B mátrix első két oszlopának összegével, (2 pont)
ezért nincs olyan C mátrix, amire $CA = B$ teljesül. (1 pont)

Teljes értékű megoldás az is, ha izomból állunk neki a dolognak:

Világos, hogy $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ezért feltehető, hogy $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (1 pont)
A mátrixszorzás definíciója alapján az alábbiak teljesülnek:

$1a + 0b = 2, 1c + 0d = 1, 0a + 1b = -1, 0c + 1d = 1, a + b = -1, c + d = 1$ (4 pont)
Az első négy egyenletből $a = 2, b = -1, c = 1, d = 1$, (2 pont)
azonban ekkor $a + b = 1$, ami ellentmond az 5-dik egyenletnek. (2 pont)
Ezért nem létezik a feladatban leírt tulajdonságú C mátrix. (1 pont)

$\boxed{\star}$ Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{42\times 42}$ mátrix determinánsa $|A| = 42$. Képezzük az A' mátrixot A-ból úgy, hogy (-1)-gyel megszorozzuk A minden páratlanodik sorának minden páratlanodik elemét és minden párosodik sorának minden párosodik elemét. Határozzuk meg az így kapott A' mátrix determinánsát!

Az A' mátrixot megkaphatjuk A-ból úgy is, hogy az A páratlanodik sorait és párosodik oszlopait megszorozzuk (-1)-gyel. (7 pont)
Ezért $|A'|$ megkapható úgy is, hogy $|A|$-t összesen 42-szer szorozzuk meg (-1)-gyel. (2 pont)
Ennek megfelelően $|A'| = (-1)^{42} \cdot |A| = |A| = 42$. (1 pont)