A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2024. 12. 11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Lehet-e a K_{13} teljes gráfból úgy törölni 42 élt, hogy a kapott gráf síkbarajzolható legyen?

   A K_{13} teljes gráf élszáma $\left|E(K_{13})\right| = \binom{13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. (2 pont)
   Ezért a 42 él törlésével kapott G gráf élszáma $78 - 42 = 36$. (1 pont)
   A konstrukcióból adódóan G egyszerű gráf, (1 pont)
   így ha G síkbarajzolható is volna, akkor a tanult tétel szerint $e \leq 3n - 6$ teljesülne, ahol e ill. n rendre G éleinek ill. csúcsainak számát jelöli. (2 pont)
   Mivel most $3n - 6 = 3 \cdot 13 - 6 = 33 < 36 = e$, ezért a kapott gráf biztosan nem síkbarajzolható. (4 pont)

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 &= 18 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= -4 \end{aligned}$$

   A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & -2 & 18 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

   (7 pont)

   Vagyis $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_5 = \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = 7 - 2\alpha + \beta$, $x_2 = \alpha$, $x_4 = 3 + \beta$. (3 pont)

   A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a lépések nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért maximum 3 pont adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Jelölje $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ és $\underline{u}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat. A p valós paraméter minden lehetséges értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ állítás.

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

   Az $\underline{u} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ állítás azt jelenti, hogy $\underline{u}$ kifejezhető a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis léteznek olyan α, β, γ skalárok, hogy $\alpha \cdot \underline{v}_1 + \beta \cdot \underline{v}_2 + \gamma \cdot \underline{v}_3 = \underline{u}$. (1 pont)

A vektoregyenlet az alábbi lineáris egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{aligned} -\alpha+\beta+\gamma &= -2 \\ \beta+2\gamma &= -3 \\ 3\alpha+\gamma &= 1 \\ \alpha+2\beta-\gamma &= p \end{aligned}$$

(1 pont)

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & p \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & p-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & p+7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & p-5 \end{array}\right)$$

(3 pont)

Ha $p-5\neq 0$, akkor az utolsó sor tilos sor, és ilyenkor nincs megoldás, (1 pont)
azaz $p\neq 5$ esetén $\underline{u}\notin\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\rangle$. (1 pont)
Ha $p=5$, akkor a Gauss-eliminációt folytatva az alábbi adódik.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

(1 pont)

Vagyis $p=5$ esetén a megoldás: $\alpha=1$, $\beta=1$ és $\gamma=-2$, (1 pont)
így ilyenkor $\underline{u}\in\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\rangle$. (1 pont)

Természetesen a $p=5$ esetben hivatkozhatunk arra is, hogy mivel a csupa nulla sor elhagyásával kapott lépcsős alak minden oszlopa tartalmaz vezéregyest, ezért van (egyértelmű) megoldása, amiből $\underline{u}\in\langle\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\rangle$ következik.

4. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok?

$$\underline{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},\quad \underline{b}=\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix},\quad \underline{c}=\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy ezek a vektorok bázist alkossanak, az kell, hogy lineárisan függetlenek legyenek és generátorrendszert alkossanak $\mathbb{R}^3$-ban. (1 pont)
A lineáris függetlenség vizsgálatához tegyük fel, hogy $\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}+\gamma\cdot\underline{c}=\underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ skalárokra. (2 pont)
Behelyettesítve az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorokat és elvégezve a műveleteket a következő lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha-3\beta+2\gamma &= 0 \\ 3\alpha-7\beta-8\gamma &= 0 \\ -5\alpha+12\beta+11\gamma &= 0 \end{aligned}$$

(1 pont)

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & -8 & 0 \\ -5 & 12 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -14 & 0 \\ 0 & -3 & 21 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3 pont)

Vagyis $\gamma\in\mathbb{R}$ szabad paraméter, $\alpha=19\gamma$ és $\beta=7\gamma$. (1 pont)
Így például a $\gamma=1$ választással $\alpha=19$ és $\beta=7$ adódik, azaz $19\underline{u}+7\underline{v}+\underline{w}$ az $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ vektorok egy olyan nemtriviális lineáris kombinációja, ami a nullvektort adja. (1 pont)
Tehát az $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ rendszer nem független, és ezért nem is bázis $\mathbb{R}^3$-ban. (1 pont)

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a **determináns definíciója szerint**. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Először megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között két nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)

Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a második sorból csak a (-1)-et, a második oszlopból pedig csak a 2-t választhatjuk. Vagyis az első sorból vagy a 6-ot vagy a (-4)-et kell választanunk. Az előbbi esetben a harmadik sorból az 1-et, az utóbbi esetben pedig a 3-at kell választanunk, így csakugyan két nemnulla szorzatunk lesz, mégpedig a $6\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2$ és a $-4\cdot(-1)\cdot 3\cdot 2$. (2 pont)

Az ezekhez tartozó permutációk rendre az 1, 3, 4, 2, illetve a 4, 3, 1, 2. (1 pont)

Ezek közül az első inverziószáma 2, mivel ebben a permutációban az inverzióban álló elempárok $(3,2)$ és $(4,2)$, (1 pont)

a másodiké 5, mivel ebben a permutációban az inverzióban álló elempárok $(4,3)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(3,1)$ és $(3,2)$. (1 pont)

A $6\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2$ szorzatot tehát pozitív előjellel kell figyelembe vennünk, mivel a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páros, (1 pont)

a $-4\cdot(-1)\cdot 3\cdot 2$ szorzatot pedig negatív előjellel, hiszen a hozzá tartozó permutáció inverziószáma páratlan. (1 pont)

A determináns értéke tehát $6\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2-(-4)\cdot(-1)\cdot 3\cdot 2=-12-24=-36$. (2 pont)

⋆ Tegyük fel, hogy $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisa, és nincs olyan $\underline{0}\neq\underline{v}\in\mathbb{R}^3$ vektor, amire $\underline{v}=[\underline{v}]_B$ teljesül. Igazoljuk, hogy a $\underline{b}_1-\underline{e}_1,\underline{b}_2-\underline{e}_2,\underline{b}_3-\underline{e}_3$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tegyük fel, hogy $\alpha\cdot(\underline{b}_1-\underline{e}_1)+\beta\cdot(\underline{b}_2-\underline{e}_2)+\gamma\cdot(\underline{b}_3-\underline{e}_3)=\underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ skalárokra. (1 pont)

Ekkor $\alpha\cdot\underline{b}_1+\beta\cdot\underline{b}_2+\gamma\cdot\underline{b}_3=\alpha\cdot\underline{e}_1+\beta\cdot\underline{e}_2+\gamma\cdot\underline{e}_3$. (0 pont)

Legyen $\underline{v}=(\alpha,\beta,\gamma)^\top$. Az előzőek alapján $[\underline{v}]_B=(\alpha,\beta,\gamma)^\top$. (4 pont)

Ekkor a feladat feltételei szerint $\underline{v}=\underline{0}$, (2 pont)

azaz $\alpha=\beta=\gamma=0$. (1 pont)

Így a tanultak szerint $\underline{b}_1-\underline{e}_1,\underline{b}_2-\underline{e}_2,\underline{b}_3-\underline{e}_3$ vektorok lineárisan függetlenek (mert $\alpha\cdot(\underline{b}_1-\underline{e}_1)+\beta\cdot(\underline{b}_2-\underline{e}_2)+\gamma\cdot(\underline{b}_3-\underline{e}_3)=\underline{0}$ csak az $\alpha=\beta=\gamma=0$ esetben lehetséges). (2 pont)