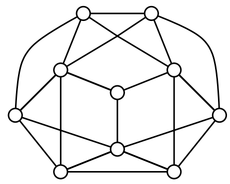
A Számítástudomány alapjai

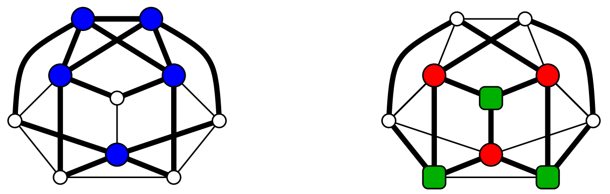
2. ZH javítókulcs (2024. 11. 28.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?



Alább látható a gráf egy K_5-tel (illetve egy $K_{3,3}$-mal) topologikusan izomorf részgráfja.



(Természetesen elég az egyik fajta részgráfot megtalálni.) (7 pont)
Így a Kuratowski-tétel (annak is a „könnyű iránya") szerint a gráf nem síkbarajzolható. (3 pont)

Az utolsó 3 pont megadható akkor is, ha egy megoldónak többszöri próbálkozás ellenére sem sikerült K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot találni, de a megoldásból egyértelmű, hogy pontosan tudta, mit keres. Természetesen mindez csak arra az esetre vonatkozik, ha a Kuratowski-tétel helyes alkalmazására irányuló szándék a dolgozatból nyilvánvaló; a többféleképpen értelmezhető vagy nem világos céllal készült ábrákért nem jár pont.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + p \cdot x_4 &= -1 \end{aligned}$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 9 & 4 & 13 \\ 5 & 6 & 15 & p & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & p-5 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right)$$

(2 pont)

1. eset: ha $p - 1 \neq 0$, azaz $p \neq 1$.

Ekkor a Gauss-eliminációt folytatva először leosztjuk az utolsó sort $(p-1)$-gyel, és így a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(2 pont)

Vagyis $p \neq 1$ esetén a megoldás: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = -5 - 3\alpha$, $x_2 = 4$, $x_4 = 0$. (2 pont)

2. eset: ha $p-1=0$, azaz $p=1$.

Ekkor a Gauss-eliminációt folytatva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

(2 pont)

Vagyis $p \neq 1$ esetén a megoldás: $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ és $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_1 = -5 - 3\alpha + \beta$, $x_2 = 4 - \beta$.

(2 pont)

A számolási hibák – egyébként elvileg jó megoldás esetén – darabonként 1 pont levonást jelentenek. Ha a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számításokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a lépések nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért maximum 3 pont adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tegyük fel, hogy $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ skalárokra. (2 pont)

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(4 pont)

Vagyis a megoldás $\alpha = \beta = \gamma = 0$. (1 pont)

Így a tanultak szerint $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan függetlenek (mert $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{0}$ csak az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ esetben lehetséges). (3 pont)

A feladat természetesen megoldható a lineáris függetlenség ekvivalens definíciójára alapozva is (vagyis annak megmutatásával, hogy $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ közül egyik sem fejezhető ki a másik kettő lineáris kombinációjaként). Ekkor az $\underline{a} \notin \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás indoklásáért 2 pont, a $\underline{b} \notin \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ állítások indoklásáért 2-2 pont jár; a hiányzó 3 pont pedig a definíció helyes alkalmazásáért jár (beleértve tehát ebbe annak az ismeretét is, hogy ilyenkor mindhárom állítás igazolása szükséges a lineáris függetlenség megmutatásához).

4. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^5$ altér azokból az $\mathbb{R}^5$-beli vektorokból, amelyeknek a páratlan koordinátái egy 2-kvóciensű mértani sorozatot alkotnak, a páros koordinátáinak összege pedig 0. Így például a jobbra látható $\underline{v}$ vektor V-beli. Határozzuk meg a V altér dimenzióját.
(Egy teljes értékű megoldáshoz nem szükséges bebizonyítani, hogy V valóban altér.)

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

A V halmaz leírása alapján a V-beli vektorok $(x_1, x_2, 2x_1, -x_2, 4x_1)^\top$ alakúak valamely x_1, x_2 valós számokra. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy az $\underline{u} = (1,0,2,0,4)^\top$ és $\underline{v} = (0,1,0,-1,0)^\top$ vektorok V egy bázisát alkotják.

(1 pont)

Ehhez azt kell belátnunk, hogy lineárisan függetlenek és V egy generátorrendszerét alkotják. (1 pont)
Nyilván $\underline{u}$ és $\underline{v}$ is egy V-beli vektor ($\underline{u}$ esetében a mértani sorozat első eleme 1, $\underline{v}$ esetében pedig 0). (1 pont)

Legyen $\underline{x} = (x_1, x_2, 2x_1, -x_2, 4x_1)^\top$ egy tetszőleges V-beli vektor. Ekkor $\underline{x}$ előáll $\underline{x} = x_1 \cdot \underline{u} + x_2 \cdot \underline{v}$ alakban. Tehát az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják. (3 pont)
Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok lineárisan függetlenek, hiszen a két vektor közül egyik sem skalárszorosa a másiknak. (Természetesen ez a definíció segítségével is belátható.) (2 pont)
Mivel találtunk egy 2-elemű bázist V-ben, ezért V dimenziója 2. (1 pont)

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ p & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Fejtsük ki a determinánst az első sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ p & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(4 pont)

Az első (3×3)-as mátrix determinánsát a harmadik oszlop szerint, a másodikét pedig az első sor szerint kifejtve a következőket kapjuk.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ p & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot p = 5p + 6$$

(2 pont)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ p & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ p & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - 4 \cdot (5p + 6) = -20p - 39$$

(3 pont)

Vagyis a keresett determináns $2(5p + 6) + (-20p - 39) = -10p - 27$. (1 pont)

A determinánst természetesen máshogy, pl. Gauss-eliminációval is ki lehet számítani. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha egy megoldó a kifejtési tétel alkalmazása során vagy a definíció szerinti kiszámítás esetén hibásan határozza meg az előjeleket, vagy ha például egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni.

⋆ Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ a $V \leq \mathbb{R}^{10}$ altér egy bázisa, és legyen a $\underline{v}$ vektor koordinátavektora a B bázis szerint $[\underline{v}]_B = (4, 2, 42, 4242)$. Igaz-e, hogy $B' = \{\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ a V altér bázisa?

Megmutatjuk, hogy igaz az állítás.

1. megoldás. Mivel $[\underline{v}]_B = (4, 2, 42, 4242)$, ezért $\underline{v} = 4 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 42 \cdot \underline{b}_3 + 4242 \cdot \underline{b}_4$. (1 pont)
Belátjuk, hogy a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek.
Tegyük fel, hogy $\lambda_1 \cdot \underline{b}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v} + \lambda_3 \cdot \underline{b}_3 + \lambda_4 \underline{b}_4 = \underline{0}$ teljesül valamilyen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ skalárokra. (1 pont)
Behelyettesítve ebbe a $\underline{v} = 4 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 42 \cdot \underline{b}_3 + 4242 \cdot \underline{b}_4$ összefüggést, majd átrendezve az egyenletet,

$$(\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{b}_1 + 2\lambda_2 \cdot \underline{b}_2 + (\lambda_3 + 42 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{b}_3 + (\lambda_4 + 4242 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{b}_4 = \underline{0}$$

adódik. (2 pont)

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek (hiszen V egy bázisát alkotják), ezért ez csak úgy lehetséges, ha $\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = 0$ és $2\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 + 42 \cdot \lambda_2 = 0$ és $\lambda_4 + 4242 \cdot \lambda_2 = 0$. (2 pont)

Ebből azonnal adódik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ is teljesül. Vagyis az előadáson tanult tétel szerint a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek. (1 pont)

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ egy 4-elemű lineárisan független V-beli rendszer, valamint a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy 4-elemű generátorrendszerét alkotják (hiszen V egy bázisát alkotják), ezért az előadáson tanult tétel szerint $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ a V egy bázisa. (3 pont)

2. megoldás.

Mivel $[\underline{v}]_B = (4, 2, 42, 4242)$, ezért $\underline{v} = 4 \cdot \underline{b}_1 + 2 \cdot \underline{b}_2 + 42 \cdot \underline{b}_3 + 4242 \cdot \underline{b}_4$. (1 pont)

Belátjuk, hogy a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják. Legyen ehhez $\underline{w}$ egy tetszőleges V-beli vektor.

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy generátorrendszerét alkotják (hiszen V egy bázisát alkotják), ezért $\underline{w} = \alpha_1 \cdot \underline{b}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{b}_2 + \alpha_3 \cdot \underline{b}_3 + \alpha_4 \cdot \underline{b}_4$ valamely $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ skalárokra. (2 pont)

Behelyettesítve ebbe a $\underline{b}_2 = \frac{1}{2} \cdot \underline{v} - 2 \cdot \underline{b}_1 - 21 \cdot \underline{b}_3 - 2121 \cdot \underline{b}_4$ összefüggést, majd átrendezve az egyenletet,

$$\underline{w} = (\alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2) \cdot \underline{b}_1 + \frac{\alpha}{2} \cdot \underline{v} + (-21 \cdot \alpha_2 + \alpha_3) \cdot \underline{b}_3 + (-2121 \cdot \alpha_2 + \alpha_4) \cdot \underline{b}_4$$

adódik. (2 pont)

Vagyis a $\underline{w}$ vektor előáll a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok egy lineáris kombinációjaként. Tehát a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok valóban V egy generátorrendszerét alkotják. (2 pont)

Mivel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ egy 4-elemű lineárisan független V-beli rendszer (hiszen egy bázis), valamint a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok V egy 4-elemű generátorrendszerét alkotják, ezért az előadáson tanult tétel szerint $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ a V egy bázisa. (3 pont)

Természetesen az is helyes, ha valaki az 1. megoldásban ismertetett módon látja be, hogy a $\underline{b}_1, \underline{v}, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok lineárisan függetlenek, és a 2. megoldásban leírt módon bizonyítja, hogy ezek a vektorok V egy generátorrendszerét alkotják. Ekkor a koordinátavektor értelmezéséért járó 1 pont megszerzése után a lineáris függetlenség bizonyítása $1+1+2+1$ pontot, a generátorrendszerség bizonyítása pedig $1+1+2$ pontot ér.