A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2024. 11. 18.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráfnak 9 csúcsa van, melyek fokszáma rendre $4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8$. Következik-e ebből, hogy a $\overline{G}$ komplementergráf bizonyosan tartalmaz kört?

   A kézfogáslemma szerint G csúcsainak fokszámösszege megegyezik G éleinek számának kétszeresével. (2 pont)
   Ezért G élszáma $\frac{1}{2}(4+4+5+5+6+6+7+7+8) = \frac{52}{2} = 26$. (1 pont)
   Mivel a K_9 teljes gráfnak $\binom{9}{2} = 36$ éle van, ezért a $\overline{G}$ komplementergráf élszáma $36 - 26 = 10$. (3 pont)
   Az órán azt tanították, hogy egy n-csúcsú, körmentes gráfnak legfeljebb $n-1$ éle lehet. (2 pont)
   Mivel a 9-csúcsú $\overline{G}$ komplementergráfnak 10 éle van, ezért $\overline{G}$ nem lehet körmentes, így bizonyosan tartalmaz kört. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

   Az első 6 pont alábbi gondolatmenet ismertetésével is megszerezhető.

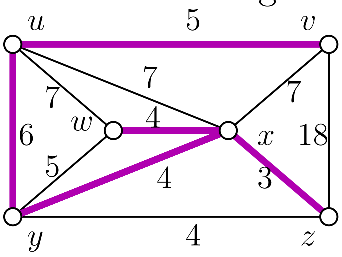
   A $\overline{G}$ komplementergráfban a fokszámok $4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0$. A kézfogáslemma szerint $\overline{G}$ csúcsainak fokszámösszege megegyezik $\overline{G}$ éleinek számának kétszeresével, ezért $\overline{G}$ élszáma $\frac{1}{2}(4+4+3+3+2+2+1+1+0) = \frac{20}{2} = 10$.

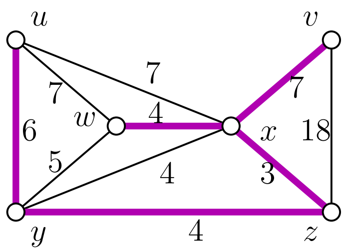
   Ekkor a fokszámok meghatározása 3 pontot, a kézfogás lemma felidézése 2 pontot, a $\overline{G}$ élszámának kiszámítása pedig 1 pontot ér.
   Ha egy megoldó helytelenül határozza meg a fokszámokat, akkor az ezért járó 3 pont elvesztése után a további részpontszámokat még megkaphatja. Ha azonban a hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor csak a fentieknek lényegében megfeleltethető részekért adható pont.

2. Van-e olyan e éle a bal oldali ábrán látható G gráfnak, amire a $G - e$ gráf minimális költségű feszítőfájának költsége 2-vel több, mint a G minimális költségű feszítőfájának költsége?

   Keressünk egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (Ez a pont akkor is jár, ha egyértelműen kiderül, hogy a megoldó ezzel az algoritmussal dolgozik.) (1 pont)

Az algoritmus az élekről a költségük szerinti növekvő sorrendben dönti el, hogy bekerüljenek-e a minimális költségű feszítőfába. (2 pont)
(Ha egy megoldó csak felrajzolja a minimális költségű feszítőfát, de egyáltalán nem követhetők nála az algoritmus lépései, az ezt a 2 pontot nem kapja meg abban az esetben sem, ha a felrajzolt feszítőfa helyes.)
Egy minimális költségű feszítőfa a bal oldali ábrán látható. Ennek a költsége 22. (2 pont)
Hagyjuk el az $e = uv$ élt és keressünk így is egy minimális költségű feszítőfát a Kruskal-algoritmussal. (3 pont)
Ekkor a jobb oldali ábrán látható feszítőfát kapjuk. Ennek a költsége 24. (2 pont)
Ezért a feladat kérdésére igenlő a válasz: van olyan éle G-nek, amit elhagyva a minimális költségű feszítőfa költsége 2-vel növekszik.





3. A mellékelt táblázat a felső becslés változását mutatja a Dijkstra-algoritmusnak egy nemnegatív élhosszokkal rendelkező, **irányítatlan** G gráfon történő futtatása során. Igaz-e, hogy bizonyosan vezet él c és f között a G gráfban? Ha igen, akkor adjuk meg a hosszát.

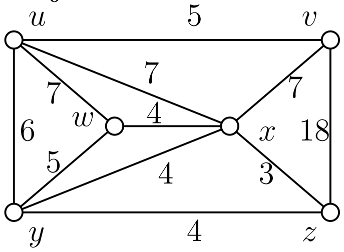
a	b	c	d	e	f
∞	0	∞	∞	∞	∞
42	0	∞	7	∞	77
24	0	33	7	42	66
24	0	28	7	42	44
24	0	28	7	33	43
24	0	28	7	33	42

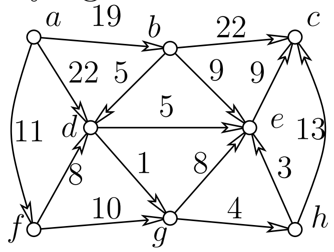
A KÉSZ halmazba mindig az a KÉSZ halmazon kívüli csúcs kerül, amelyikre az aktuális felső becslés a legkisebb, majd a bekerült csúcsból a kilépő élek mentén javítunk. (2 pont)
Az alábbi táblázatban a bekarikázott számú csúcsok kerülnek az adott lépésben a KÉSZ halmazba, a számok mellé írt csúcsok pedig azt jelölik, hogy melyik csúcsból kilépő él mentén történt meg a javítás. (4 pont)
(Természetesen ez a 4 pont akkor is jár, ha más módon jelennek meg egy megoldásban a szükséges információk.)

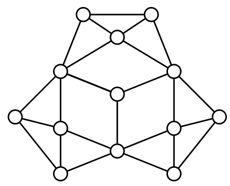
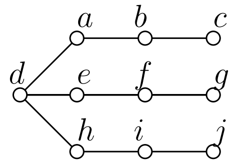
a	b	c	d	e	f
∞	0	∞	∞	∞	∞
42 $_b$		∞	7 $_b$	∞	77 $_b$
24 $_d$		33 $_d$		42 $_d$	66 $_d$
		28 $_a$		42 $_d$	44 $_a$
				33 $_c$	43 $_c$
					42 $_e$

Az előző táblázatból kiolvasható, hogy a c csúcsból javítottunk az f-hez tartozó felső becslésen, tehát c és f között biztosan vezet él, (2 pont) melynek hossza $43 - 28 = 15$. (2 pont)

4. Határozzuk meg a második ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket.

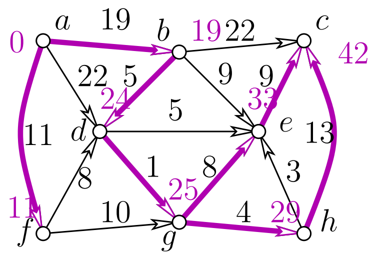




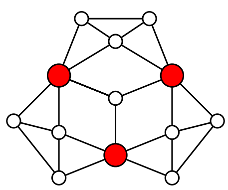
Forrástörlés módszerével (vagy más, alkalmas módon) meghatározzuk a G gráf csúcsainak egy topologikus sorrendjét: a, b, f, d, g, h, e, c. (2 pont)
(Ha nem derül ki a (helyes) topologikus sorrend meghatározásának módszere, az 1 pont veszteség.)
Az órán tanult PERT-módszer futtatása után az ábrán látható eredmény adódik. A legkorábbi befejezési időket a csúcsok mellett álló számok jelzik, (3 pont)
az egyes csúcsokba befutó leghosszabb utak utolsó éleit pedig megvastagítottuk. (3 pont)
A kritikus tevékenységek a, b, d, g, e, h, c, más szóval f kivételével az összes tevékenység. (2 pont)

Ha egy megoldó elszámol egy befejezési időt (de utána azzal helyesen számol tovább), akkor 1 pontot, ha pedig nem jelöli meg az összes lehetséges utolsó élt, akkor ezért 2 pontot veszít.



5. Van-e Hamilton-köre a harmadik ábrán látható gráfnak?

Az alábbi ábrán pirossal jelzett 3 csúcsot elhagyva a gráf 4 komponensre esik szét, (7 pont)
(nevezetesen egy izolált csúcsra és három darab K_3-ra),
amiből az előadáson tanult tétel szerint következik, hogy a gráfnak nincs Hamilton-köre. (3 pont)



Ha egy megoldó tudja, hogy mit kellene keresni, de (látható próbálkozások ellenére) nem találja, akkor az előadáson tanult tétel helyes kimondásáért járó 3 ponton felül a próbálkozások minőségétől függően legfeljebb további 2 pontot kaphat.

⋆ A negyedik ábrán látható a G gráf egy BFS-fája. Lehetséges-e, hogy bg, fj és ci is élei G-nek?

Bebizonyítjuk, hogy nem lehetséges.
Az órán az tanították, hogy minden gráfél legfeljebb egy szintet lép lefelé a BFS-fában. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy ebből az következik, hogy a BFS-fa gyökere csak a d csúcs lehetne. Az a csúcs nem lehetett a gyökér, hiszen az a-tól a b távolsága 1, míg a g távolsága 4, vagyis a bg él több mint egy szintet lépne lefelé. Szimmetriaokok miatt az e csúcs sem lehetett gyökér az fj él miatt, valamint a h csúcs sem lehetett gyökér az ic él miatt.
A c csúcs sem lehetett gyökér, hiszen a c-től a b távolsága 1, míg a g távolsága 6, vagyis a bg él több mint egy szintet lépne lefelé. Szimmetriaokok miatt a g csúcs sem lehetett gyökér az fj él miatt, valamint a j csúcs sem lehetett gyökér az ic él miatt. (4 pont)

Viszont a d csúcsból indulva bármelyik csúcsot is érjük el az b, f és i csúcsok közül elsőként a BFS-bejárás során, a BFS-fába be kell kerülnie a bg, fj vagy ic él valamelyikének. (4 pont)
Tehát bg, fj és ci nem lehet egyszerre éle G-nek. (1 pont)

Ha egy megoldó a feladatbeli ábra alapján azt feltételezte, hogy a d csúcs volt a gyökér, akkor az ennek indoklásáért járó 4 pontot értelemszerűen nem kaphatja meg. Ha egy megoldó csak annyit mond, hogy a d gyökértől nézve a bg, fj és ic élek is a BFS-fa szomszédos szintjei között futnak és emiatt a feladat kérdésére igenlő a válasz, akkor ezért a gondolatért legfeljebb 2 pontot kaphat.