A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

11. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: Egy n-tagú $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ számsorozatot *permutációnak* nevezzük, ha az $1, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza.

Def: A $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ permutációban a σ_i és a σ_j tagok *inverzióban* állnak, ha $i < j$, de $\sigma_i > \sigma_j$. A σ permutáció *inverziószáma* az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\sigma)$.

Def: Egy $(n \times n)$-es mátrixban n darab elem *bástyaelhelyezést* alkot, ha a mátrix minden sorában és oszlopában pontosan egy kiválasztott elem van. Azt mondjuk, hogy egy $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ permutáció megfelel egy bástyaelhelyezésnek, ha a mátrix első sorban a σ_1-edik, a másodikban a σ_2-edik, stb., az n-edikben a σ_n-edik elemet választottuk ki.

Def: Egy $(n \times n)$-es A mátrix *determinánsát* a következőképpen kapjuk: minden bástyaelhelyezésére szorozzuk össze az azt alkotó n elemet és ezt a szorzatot szorozzuk meg $(-1)^{I(\sigma)}$-nal, ahol σ a bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció, végül az így kapott $n!$ darab n-tényezős előjelezett szorzatot adjuk össze. Jelölése: $|A|$ vagy $\det A$.

Tétel: Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(i) Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.

(ii) Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.

(iii) Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.

(iv) Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

(v) Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.

(vi) Ha A egy sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Def: Egy $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} *előjeles aldetermináns* az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával keletkező $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

Tétel: Ha az $n \times n$-es A mátrix valamelyik sorának vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott n darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor A determinánsának értékét kapjuk.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg az $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$, valamint az $(n, n-1, \dots, 2, 1)$ permutációk inverziószámát.

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint.

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét Gauss-elimináció segítségével.

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

4. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával.

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & \pi \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

---

6. Határozzuk meg annak a (4×4)-es A mátrix determinánsát, melyben tetszőleges $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

(a) $a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j; \end{cases}$ (b) $a_{ij} = \min(i, j)$

7. A (6×6)-os A mátrix főátlójában és alatta minden elem 1-es, a jobb felső sarkában álló elem 2024, a mátrix összes többi (14 darab) eleme pedig 0. Határozzuk meg A determinánsát.

8. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{42 \times 42}$ mátrixnak minden olyan eleme 42, ami közvetlenül a főátló alatt vagy felett áll, és A minden más eleme 0. Határozzuk meg A determinánsát. (ZH '22)

9. A p valós paraméter minden valós értékére határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát.

(a) $\begin{vmatrix} p & 1 & 3 & 7 \\ 1 & p & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & p & p \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$

10. A p paraméter milyen értékére lesz az alábbi determináns 42? (pZH '22)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & p & p \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 3 & 3 \\ p & 0 & 2 & p \end{vmatrix}$$

---

11. Egy (101×101)-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye}, & \text{ha } i \cdot j \text{ páros}, \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát.

12. Határozzuk meg minden $n \in \mathbb{Z}_+$ esetén azon $(n \times n)$-es A mátrix determinánsát, melyben tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

(a) $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$; (b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$

13. Egy $(n \times n)$-es mátrix minden sorában az elemek összege 42. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 42-edrésze lesz az eredeti mátrix determinánsának.

14. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

15. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0.$$