A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

10. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: Egy $V \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *alteret* alkot, ha nem üres, valamint ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, azaz $\underline{u} + \underline{v}, \lambda\underline{u} \in V$ teljesül minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Jelölése: $V \leq \mathbb{R}^n$.

Def: Az $\underline{u}_1, \ldots \underline{u}_k$ vektorok által *generált altéren* az $\underline{u}_1, \ldots \underline{u}_k$ vektorok lineáris kombinációinak halmazát értjük. Jelölése: $\langle \underline{u}_1, \ldots \underline{u}_k \rangle$.

Def: Az $\underline{u}_1, \ldots \underline{u}_k$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér *generátorrendszerét* alkotják, ha $\langle \underline{u}_1, \ldots \underline{u}_k \rangle = V$.

Kicserélési lemma: Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ egy altér, $F \subseteq V$ egy lineárisan független rendszer, G pedig V egy generátorrendszere. Ekkor tetszőleges $\underline{f} \in F$ esetén létezik $\underline{g} \in G$, amelyre $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lineárisan független.

F-G egyenlőtlenség: Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ egy altér, $F \subseteq V$ egy lineárisan független rendszer, G pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér *bázisán* a V egy lineárisan független generátorrendszerét értjük.

Állítás: Ha F egy lineárisan független rendszer, G pedig egy generátorrendszer a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérben, akkor F kiegészíthető, G pedig kiritkítható V egy bázisává.

Köv.: Minden altérnek van bázisa.

Köv.: Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ egy altér, $F \subseteq V$ egy lineárisan független rendszer, G pedig V egy generátorrendszere. Ha $|F| = |G|$, akkor F és G a V bázisai.

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér *dimenziója* $\dim V = k$, ha V-nek van k-elemű bázisa.

Állítás: Ha B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa, akkor minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen fejezhető ki a B bázis elemeinek lineáris kombinációjaként.

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa, és $\underline{v} = \lambda_1\underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{b}_k$, akkor a $\underline{v}$ vektor B *bázis szerinti koordinátavektora*

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Gyakorlatok

1. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^5$-ben az alábbi részhalmazok?
   (a) A V halmaz azon vektorokból áll, melyeknek az első 4 koordinátája számtani sorozatot alkot, az utolsó koordináta pedig az első 4 koordináta összege.
   (b) A W halmaz azokból a vektorokból áll, amelyek első három koordinátájának az összege legalább annyi, mint az utolsó két koordinátájuk összege.
2. Alteret alkot-e $\mathbb{R}^3$-ban a $V = \{(x, y, z)^\top : x + y + 2z \geq 0\}$ vektorhalmaz, ahol $(x, y, z)^\top$ azt a 3-magasságú oszlopvektort jelöli, melynek koordinátái fentről lefelé x, y, z? (pZH '23)
3. Legyen
$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   (a) Határozzuk meg az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által generált alteret.
   (b) Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok?
   (c) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok? Ha igen, határozzuk meg $\underline{a}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.
   (d) Határozzuk meg az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által generált altér dimenzióját.
   (e) Határozzuk meg az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.
4. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{a} = (1, 1, 0)^\top$, $\underline{b} = (2, 2, 1)^\top$, $\underline{c} = (3, 4, 2)^\top$ vektorok?
5. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban a $\underline{v}_1 = (-1, 2, 7)^\top$, $\underline{v}_2 = (1, -3, -6)^\top$ és $\underline{v}_3 = (5, 42, 3)^\top$ vektorok? (ZH '22)

6. Legyen $\underline{b}_1 = (1,3,-2)^\top$ és $\underline{b}_2 = (2,1,1)^\top$ mellett $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ a $V \le \mathbb{R}^3$ altér bázisa. Határozzuk meg a $\underline{v} = (1,-7,8)^\top \in V$ vektor B bázis szerinti $[\underline{v}]_B$ koordinátavektorát. (pZH '22)
7. Határozzuk meg az 1. feladatbeli alterek dimenzióját.
8. Álljon a $V \le \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek. Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

---

9. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok az $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ oszlopvektorok, amelyekre $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4$ vagy $\underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_1$ számtani sorozatot alkot? (ZH '23)
10. Legyen
$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}.$$
A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p ezen értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.
11. Mely p valós számok esetén teljesül, hogy az alábbi vektorrendszert $\mathbb{R}^4$ bázisává lehet kiegészíteni?
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ p \end{pmatrix}$$
12. Egészítsük ki az $\underline{u}_1 = (5,2,-4,2)^\top$, $\underline{u}_2 = (3,0,1,1)^\top$, $\underline{u}_3 = (2,1,1,2)^\top$ vektorokat az $\mathbb{R}^4$ tér bázisává, ha lehet.
13. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például a jobbra látható vektor Fibonacci-típusú. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
   (a) Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben.
   (b) Határozzuk meg ennek az altérnek a dimenzióját, valamint adjuk meg ennek az altérnek egy olyan bázisát, amely tartalmazza a példaként megadott vektort.

---

14. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy
$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k \rangle.$$
15. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^{99}$ tér két 50-dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.
16. Legyenek U és V olyan 10-dimenziós alterek $\mathbb{R}^{20}$-ban, amelyeknek a nullvektoron kívül nincs közös eleme. Mutassuk meg, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorhoz találhatók olyan $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$.
17. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{c} + \underline{d}, \underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.
18. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}, \underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$?