A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

9. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: Az $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k$ vektorok *lineáris kombinációja* alatt egy $\lambda_1\underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{u}_k$ kifejezést értünk, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$. *Triviális lineáris kombináció:* olyan lineáris kombináció, amiben minden λ_i együttható 0.

Def: Az $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k\}$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő, azaz a $\lambda_1\underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{u}_k = \underline{0}$ kizárólag abban az esetben teljesül, ha $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ellenkező esetben a vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezzük.

Lemma: Az $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha egyetlen vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Gyakorlatok

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok körében.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 2x+3y-2z &= 0 \\ 5x+7y-3z &= 6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x-y+5z &= 3 \\ 3x+2y+6z &= 4 \\ 4x-9y+13z &= 9 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 14 \\ 2x_1+6x_2+10x_3+6x_4+2x_5 &= 28 \\ x_1+5x_2+9x_3+2x_4+6x_5 &= 16 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket. A második egyenletrendszer megoldásait minden valós p esetén határozzuk meg.

$$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2 \\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1 \\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34 \\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= 21 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2 \\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1 \\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34 \\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= p \end{aligned}$$

4. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok?
   (b) Kifejezhető-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkalmas lineáris kombinációjával az $\underline{a}$ vektor?
   (c) Kifejezhető-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkalmas lineáris kombinációjával a $\underline{b}$ vektor?
   (d) Mely vektorok fejezhetők ki az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból?

5. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   (a) Lineárisan függetlenek-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok?
   (b) Kifejezhető-e az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok alkalmas lineáris kombinációjával az $\underline{a}$ vektor?
   (c) Mely vektorok fejezhetők ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?
   (d) Kifejezhető-e az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok alkalmas lineáris kombinációjával az $\underline{a}$ vektor?
   (e) Mely vektorok fejezhetők ki az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorokból?

6. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert. Legfeljebb mennyi lehet egy megoldásban az x_2 ismeretlen értéke, ha $x_4 \leq 13$? (ZH '22)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -8 \end{aligned}$$

7. Van-e olyan megoldása az alábbi lineáris egyenletrendszernek, amiben az x_2 változó értéke pontosan 2-szerese az x_3 változóénak? (pZH '22)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 11x_4 &= 22 \end{aligned}$$

8. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 6x_2 + px_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 1x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 14 \\ 3x_1 + 13x_2 - 9x_3 + p \cdot x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 14x_2 + 10x_3 + (p-3) \cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

9. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek összes megoldását minden pozitív egész n esetén.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n &= n-1 \\ &\vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

10. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

11. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

12. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ az $\mathbb{R}^n$ tér lineárisan független vektorai. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $2\underline{a}$, $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

---

13. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmaznia az eredeti egyenletrendszer?

14. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy van olyan megoldása, amiben a változók összege 2020, de olyan megoldása már nincs, amiben a változók összege 2021. Eldönthető-e ennyi információ alapján, hogy ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek van-e olyan megoldása, amiben a változók összege 2022?

15. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben 4 darab vektor úgy, hogy közülük bármely 2 lineárisan független legyen, de semelyik 3 ne legyen lineárisan független?

16. Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek. A p paraméter mely értékeire teljesül, hogy a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - p \cdot \underline{v}_1$ vektorok szintén lineárisan függetlenek?

17. Tegyük fel, hogy az $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\ldots$, $\underline{v}_m$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.