

A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

8. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: A G gráf *síkbarajzolható*, ha létezik G -nek olyan diagramja, amiben az éleknek megfelelő görbék (töröttvonalak) csak végpontokban metszhetik egymást. Az ilyen tulajdonságú diagramot *síkbarajzolt gráf*nak hívjuk. A síkbarajzolt gráf a síkot *tartományokra* (*lapokra*) osztja. Lesz egy végtelen tartomány, az ún. *külső* tartomány. Gömbre rajzoláson lényegében ugyanezt értjük, csak sík helyett a gömb felszínén dolgozunk, külső tartomány nincs.

Tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha G gömbre rajzolható.

Köv.: Tetsz. konvex poliéder élhálója síkbarajzolható.

Duális kézfogás-lemma (DKFL): Ha egy G síkbarajzolt gráfnak e éle van, és az egyes tartományait $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t$ él határolja, akkor $2e = \sum_{i=1}^t \ell_i$. (Multiplicitással számolunk: Ha egy uv él mindkét oldalán ugyanaz a t_i tartomány fekszik, akkor uv -t kétszer számoljuk ℓ_i -be.)

Tétel: Ha egy G síkbarajzolt gráfnak n csúcsa, e éle, k komponense és t tartománya van, akkor $n + t = e + k + 1$.

Köv.:

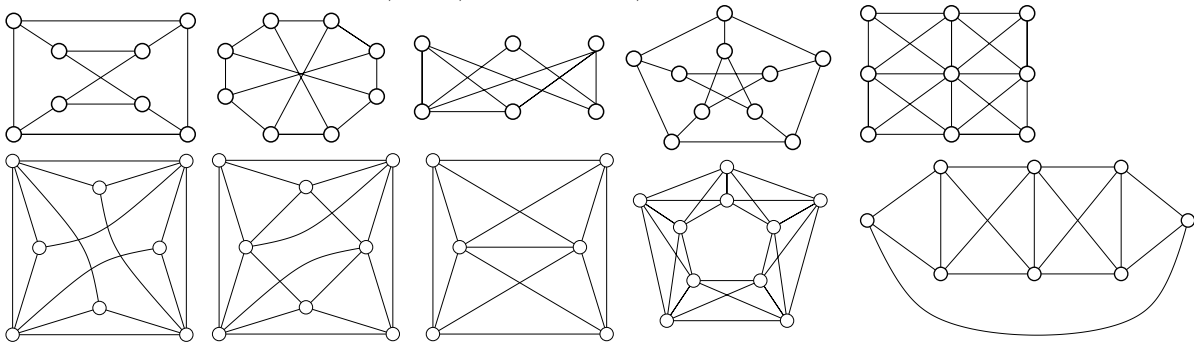
- (1) Ha G síkbarajzolható, akkor bármely síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.
- (2) **(Euler-féle poliéderformula)** Ha G öf síkbarajzolt gráf, akkor $n + t = e + 2$.
- (3) Ha G egyszerű, legalább 3-pontú, síkbarajzolt gráf, akkor $e \leq 3n - 6$.
- (4) Ha G -nek háromszöglapja sincs, akkor még $e \leq 2n - 4$ is igaz.
- (5) Ha G síkbarajzolható és egyszerű, akkor van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azaz $\delta(G) \leq 5$.

Def: Topologikus $K_{3,3}$ ill. K_5 alatt olyan gráfot értünk, amit $K_{3,3}$ -ból ill. K_5 -ből úgy kapunk, hogy tetszőleges számú élt közös belső pont nélküli utakkal helyettesítünk.

Kuratowski-tétel: A G gráf pontosan akkor síkbarajzolható ha G nem tartalmaz sem topologikus $K_{3,3}$, sem topologikus K_5 részgráfot.

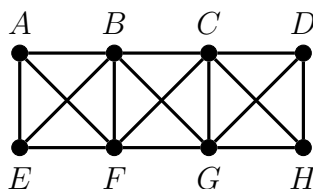
Gyakorlatok

1. Hány csúcsa van egy olyan összefüggő síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?
2. Egy 20-csúcsú konvex poliédernek 12 lapja van, mind ℓ -oldalú sokszög. Mennyi az ℓ értéke?
3. Síkbarajzolható-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok? Hát az alábbiak?

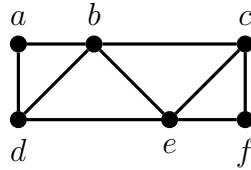


4. Tekintsünk egy kockát és annak egy testátlóját. Legyenek a G gráf csúcsai a kocka csúcsai, és két csúcs között akkor fusson él G -ben, ha ezen csúcsok a kocka egy élének vagy a kijelölt testátlójának a végpontjainak felelnek meg. Síkbarajzolható-e a G gráf? (pZH '22)

5. Maximálisan hány élt lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk?



6. Legkevesebb hány élt kell behúzni az alábbi gráfba ahhoz, hogy a kapott gráf ne legyen síkbarajzolható? (ZH '22)



7. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráf három olyan feszítőfát tartalmaz, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G tartalmaz topologikus K_5 -öt vagy topologikus $K_{3,3}$ -at.
8. Egy gráfban minden pont fokja legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5-hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf.
9. Egy 20-csúcsú, 18-élű gráfnak két komponense van. Mutassuk meg, hogy a gráf síkbarajzolható.
-
10. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor G és \overline{G} közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
11. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G -nek?
12. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot. G pontjai a gyanús cégek, és két csúcs között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G -t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket? (ZH '14)
13. Egy mezőn k ház és k kút áll (ahol $k \in \mathbb{N}$). Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
14. A $K_{5,5}$ gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy semelyik három élnek sincs közös belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor legalább 9 élmetszéspontra keletkezik. Mutassuk meg, hogy K_{10} ugyanilyen megköötésekkel történő lerajzolásakor legalább 42 élmetszéspontra keletkezik. (!*)
15. Mutassuk meg, hogy a K_5 , K_6 , K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G -be behúzzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.
16. Igazoljuk, hogy ha G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelyben minden fokszám páros, akkor G tartományai kiszínezhetők sakktáblaszerűen két színnel úgy, hogy az élben szomszédos tartományok színe egymástól különböző legyen. (!)