# A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

7. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

## Tudnivalók

**Def:** A $G = (V, E)$ gráf *Euler-(kör)sétája* a $G$ olyan (kör)sétája, mely $G$ minden élét tartalmazza.

**Tétel:** Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráfra $G$-nek pontosan akkor van Euler-körsétája ha (1) $G$ izolált pontoktól eltekintve összefüggő és (2) $G$ minden csúcsának fokszáma páros. Euler-sétája pedig pontosan akkor van $G$-nek, ha (1) mellett teljesül, hogy (2') $G$-nek legfeljebb 2 páratlan fokú csúcsa van.

**Def:** A $G$ gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* egy $G$ minden csúcsát tartalmazó kör (út).

**Állítás:** Ha a $G$ gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor $G$-nek $k$ tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb $k$ (ill. $k + 1$) komponense van.

**Def:** Az $n$-csúcsú, egyszerű $G$ gráf $u, v$ csúcsai *gazdag párt* alkotnak, ha $d(u) + d(v) \geq n$.

**Dirac tétele:** Ha egy $n$-csúcsú ($n \geq 3$), egyszerű $G$ gráfban minden fokszám legalább $\frac{n}{2}$, akkor $G$-nek van Hamilton-köre.

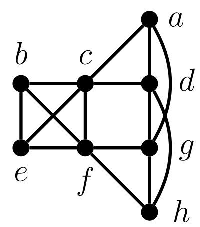
**Ore tétele:** Ha egy $n$-csúcsú ($n \geq 3$), egyszerű $G$ gráf bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor $G$-nek létezik Hamilton-köre.

**Hízlalási lemma:** Ha egy $n$-pontú $G$ gráfban $u, v$ gazdag pár, akkor $G$ és $G + uv$ közül vagy mindkét gráfnak van Hamilton-köre, vagy egyiknek sincs.

**Köv.:** Ha van Hamilton-köre egy olyan $G'$-nek, amit a hízlalási lemmában leírt élek behúzásával kapunk $G$-ből, akkor $G$-nek is van Hamilton-köre.

## Gyakorlatok

1. Legyen $G$ a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{42}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire a $p_i$ és $p_j$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak, ha $|i - j| \leq 2$. Van-e $G$-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör, ill. Hamilton-út? (V '01)
2. Bejárható-e a) a $4 \times 4$-es, b) a $3 \times 5$-ös, c) a $3 \times 6$-os sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? d) Van-e a $4 \times 4$-es sakktáblán a huszárnak olyan lépéssorozata, ami minden, egymástól huszárlépésre lévő mezőpár között pontosan egy lépést tartalmaz?
3. A 101-csúcsú, egyszerű $G$ gráf egyik csúcsának a fokszáma 50, az összes többi csúcsának a fokszáma pedig legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör.
4. Legyen $G$ az ábrán látható gráf.
   (a) Van-e $G$-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör, illetve Hamilton-út?
   (b) Legkevesebb hány élt kell törölni a $G$ gráfból ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Euler-körsétája? (ZH '23)
   (c) Van-e $G$-nek Hamilton-köre? Ha van, akkor legkevesebb hány élt kell törölni $G$-ből, hogy a kapott gráfnak ne legyen Hamilton-köre? (pZH '23)




---

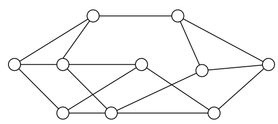
5. A $G$ gráfnak 3 piros, 3 fehér és 5 zöld csúcsa van. Minden piros csúcs össze van kötve minden fehér csúccsal, minden zöld csúcs össze van kötve minden más zöld csúccsal, és más él nincs $G$-ben. a. Legkevesebb hány élt kell behúzni $G$-be az egyszerûség megtartásával ahhoz, hogy az így kapott gráfnak legyen Euler-körsétája? (ZH '22)

   b. Van-e $G$-nek Hamilton-köre? Ha nincs, akkor legkevesebb hány élt kell behúzni $G$-be ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-köre? (pZH '22)
6. Legyenek a $G$ gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 101$ számok, és az $i$ és a $j$ csúcsok akkor legyenek összekötve, ha $i + j$ osztható 3-mal. Határozzuk meg, a legkisebb $k$ értéket, amire igaz, hogy $G$-be $k$ élt behúzva olyan egyszerű gráf kapható, aminek van a) Euler-sétája, b) Euler-körsétája, c) Hamilton-útja, ill. d) Hamilton-köre.
7. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű $G$ gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor $G$-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle. (pZH '14)

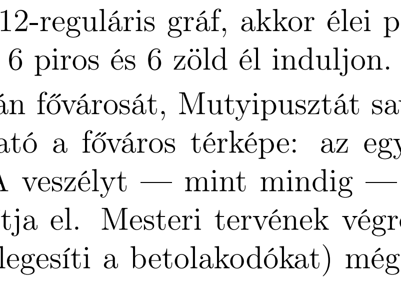
8. A 101-csúcsú, egyszerű $G$ gráf pontosan két csúcsának a foka 50, az összes többi csúcsának a foka legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy $G$-ben van Hamilton-út.
9. A $G$ egyszerű gráfnak $2k+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább $k$ a foka. Bizonyítsuk be, hogy $G$-ben van Hamilton-út. (ZH '01)
10. 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22-t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő lánccal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást. (ZH '15)
11. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (ZH '00)
12. Legyen $G$ egy 10-csúcsú, egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy $G$-nek nincs Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai pedig rendre $3,3,3,4,4,4,4,9,9,9$. (pZH '16)
Mutassuk meg, hogy $G$-nek van Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai $3,3,4,5,5,5,5,5,5,6$.

---

13. A $G$ egyszerű gráfnak 33 piros, 777 fehér, 333 zöld, valamint 77 sárga csúcsa van. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok különböző színűek. Behúzható-e $G$-be néhány további él úgy, hogy olyan egyszerű gráfot kapjunk, aminek van Euler-sétája? (pZH '17)
14. A mellékelt ábra Abszurdisztán fővárosa szennyvízhálózatának vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Nem zárható ki, hogy úgynevezett endzsió terroristák egy sátáni terv keretében valahol megmérgezték a szennyvízhálózatot. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy a közszolgálati csatornák élő közvetítésében egy erre a feladatra speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken. Mivel a szkafanderre is rátapadhat a szennyvizet szennyező ismeretlen méreg, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételten behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse? (ZH '08)



15. Mutassuk meg, hogy ha $G$ egy 12-reguláris gráf, akkor élei pirosra és zöldre színezhetők úgy, hogy minden csúcsból pontosan 6 piros és 6 zöld él induljon.
16. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt — mint mindig — most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat! (*) (ZH '16)




17. A bölcsiben nyuszis-cicás dominókkal játszanak a gyerekek: a 24-darabos készlet kövei a 4-féle nyusziból és 6-féle cicából alkotható párok. Lehet-e az összes dominóból olyan kört alkotni, ahol az egymást követő köveken egymás mellett álló képek megegyeznek? (*)
18. Azt mondjuk, hogy az $n$-csúcsú $G$ egyszerű gráfnak $u, v$ csúcsai *tehetős párt* alkotnak, ha $d(u) + d(v) \geq n - 1$. Tegyük fel, hogy $(u, v)$ tehetős párt alkot. Igazoljuk, hogy $G$-nek pontosan akkor van Hamilton-útja, ha a $G + uv$ gráfban van Hamilton-út. (*)