A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

6. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: *Mélységi bejárás* (avagy *DFS*) alatt olyan gráfbejárást értünk, amikor mindig a lehető legkésőbb elért csúcsból kerül elérésre a soron következőnek elért csúcs. Az elérési illetve befejezési sorrendből adódik minden v csúcshoz egy $m(v)$ *mélységi* ill. $b(v)$ *befejezési szám*.

Megfigyelés: (1) Ha uv faél vagy előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$, ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$, ha pedig uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(2) Következmény: irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf *aciklikus* avagy *DAG (directed acyclic graph)*, ha G-ben nincs irányított kör.A G csúcsainak egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje *topologikus sorrend*, ha G minden éle egy kisebb sorszámú csúcsból egy nagyobb sorszámúba mutat?

Köv.: (1) Ha G DAG, akkor a DFS utáni befejezési sorend megfordítása topologikus sorrend.
(2) Tetszőleges $G = (V, E)$ irányított gráfra az alábbi három tulajdonság ekvivalens:
(a) G DAG, (b) G csúcsainak van topologikus sorrendje, (c) G DFS bejárása után nincs visszaél.

A PERT probléma: Input: a $G = (V, E)$ DAG és egy $c : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény.
Output: Minden $v \in V$ csúcsra egy v-be vezető leghosszabb irányított út és annak a hossza.

A PERT módszer: Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ topologikus sorrendjét (pl DFS-sel). A $k(v_i) = \max\left(\{k(v_j) + c(v_j v_i) : v_j v_i \in E\} \cup \{0\}\right)$ formulával sora kiszámítjuk a $k(v_1), k(v_2), \ldots$ kezdési időket ill. megjelöljük mindazon $v_i v_j$ éleket, amelyek mentén a maximum eléretik.

Def: A PERT *kritikus útja* a G egy leghosszabb útja, *kritikus tevékenység* pedig olyan csúcs, ami kritikus úton van.

Megfigyelés: (1) Kritikus út forrásból nyelőbe vezet, és (2) több kritikus út is lehetséges.
(3) A kritikus utak minden élét megjelöltük a PERT módszer során.
(4) Egy tevékenység pontosan akkor kritikus, ha annak megkezdésében a legkisebb mértékű csúszás is a teljes projekt befejezésének késését okozza.

Gyakorlatok

1. Éllistáikkal adottak az alábbi irányított gráfok. G_1: ***a***: b, c, d; ***b***: d; ***c***: d; ***d***: e; ***e***: a
   G_2: ***a***: f, g; ***b***: a, g; ***c***: - ; ***d***: - ; ***e***: c, d; ***f***: e; ***g***: e, f

   (a) Keressünk a G_1 és G_2 gráfokban egy-egy mélységi feszítő erdőt.
   (b) Döntsük el mélységi bejárás segítségével, hogy ezek a gráfok aciklikusak-e.
   (c) Amelyik gráf aciklikus, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet.

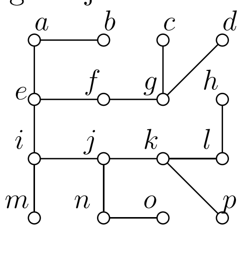
2. A 6-pontú, irányított G egy mélységi bejárásánál a mélységi, illetve a befejezési számok a következők. ***x***: $(1, 6)$; ***y***: $(2, 4)$; ***z***: $(6, 5)$; ***u***: $(3, 3)$; ***v***: $(4, 1)$; ***w***: $(5, 2)$

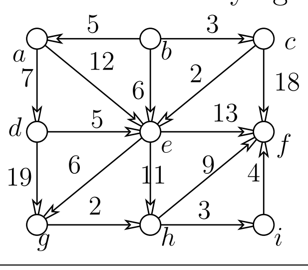
   Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit.

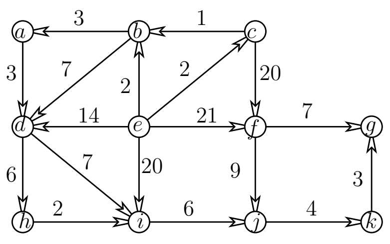
3. Az lenti első ábrán egy egyszerű G irányítatlan gráf egy i gyökerű DFS fája (azaz egy i-ből indított mélységi bejárása utáni feszítőfája) látható. Határozzuk meg G e-ből induló éleit, ha $d_G(e) = 7$.

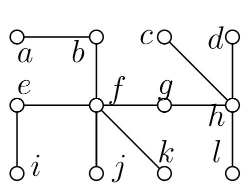
4. Legfeljebb hány éle lehet az egyszerű, irányított G gráfnak, ha G-nek a, b, c, d, e és d, b, c, a, e is topologikus sorrendje? (pZH '22)

5. Határozzuk meg a lenti második és harmadik ábrán látható PERT problémákban a legrövidebb végrehajtási időt és a kritikus tevékenységeket.





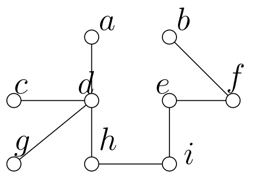


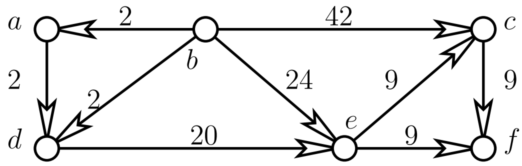


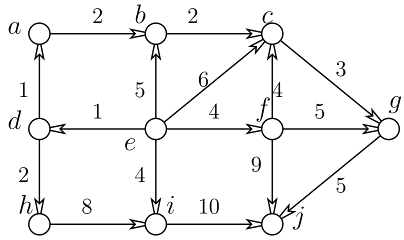
---

6. A fenti negyedik ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c ill. a és e szomszédosak G-ben? (ZH '14)

7. Tegyük fel, hogy az alábbi bal oldali ábrán látható F fa a G egyszerű gráfnak egyszerre h-gyökerű BFS fája és d-gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

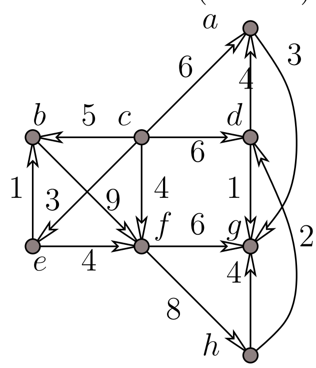






8. Határozzuk meg a fenti középső ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét! DAG-ot kapunk-e akkor, ha a cf él irányítását megfordítjuk? Ha igen, akkor mennyi lesz az így kapott PERT probléma minimális végrehajtási ideje? (ZH '22)

9. A fenti jobb oldali ábrán látható G gráf egyes éleire írt számok azt jelentik, hogy hány kincset tudunk összegyűjteni az adott élen. Határozzuk meg, mennyi az összesen összegyűjthető kincsek száma, ha a gráf tetszőleges pontjából indulhatunk, de csak irányított élek mentén haladhatunk. (!)



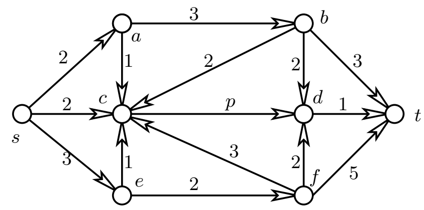
10. Határozzuk meg az oldalt ábrázolt PERT probléma minimális végrehajtási idejét! Elérhető-e a cd élre írt szám megváltoztatásával, hogy egy korábban kritikus tevékenység a változtatás után ne legyen kritikus?

---

11. Igaz-e, hogy ha egy n csúcsú, aciklikus, irányított G gráfban van egy $n-1$ élű irányított út, akkor G csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van? (ppZH '14)

12. Legyen G egy DAG, és tegyük fel, hogy az u és v csúcsok között egyik irányban sincs irányított út G-ben. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyat topologikus sorrendje, amelyben u megelőzi v-t, és olyan is, amelyben v előzi meg u-t. (!)

13. Határozzuk meg az oldalsó ábrán látható PERT problémában a legrövidebb végrehajtási időt és a kritikus tevékenységeket a pozitív p paraméter függvényében.



14. Adjunk olyan eljárást, amely tetszőleges PERT probléma esetén minden tevékenységhez meghatározza azt a legkésőbbi időpontot, amikor az adott tevékenységet elkezdve a teljes PERT feladat legrövidebb idő alatti végrehajtása még éppen nem kerül veszélybe.(!)

15. Adott a PERT problémát leíró G DAG és a G egy $e = uv$ éle. Tudjuk, hogy x összeg kifizetésével a $c(e)$ érték x-szel csökken. (A többi c érték adott, azokra nincs ráhatásunk.) Adjunk olyan eljárást, amelynek segítségével meghatározható az a legkisebb x érték, aminek kifizetésével a PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajthatóvá válik.(*)

16. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ hurokélmentes, irányított gráf felbontható két aciklikus gráfra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok aciklikusak.

17. Egy adott időszakra több megbizatást is kaphatnánk. Mindegyik megbízatás olyan munkát jelent, ami néhány egymást követő napot foglal le. Adott, hogy melyik megbízatás melyik nap kezdődik és meddig tart. Továbbá adott mindegyikhez, hogy mennyi pénzt keresnénk vele. Adjunk hatékony algoritmust annak meghatározására, hogy legfeljebb mennyi pénzt kereshetünk úgy, hogy egy napon csak egyféle munkát tudunk elvégezni. (Fizetés csak az adott megbízatások teljes elvégzéséért jár.)

18. Egy helytörténész a falu korábbi lakosairól szóló kérdéseire következő típusú válaszokat kapta:
1. S_i személy meghalt S_j születése előtt; 2. S_i személy élete során született S_j;
3. S_i személy korábban született, mint S_j; 4. S_i korábban halt meg, mint S_j.
Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden információ helyes. Adjunk hatékony algoritmust, amivel k darab fenti típusú válaszról eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.