A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

5. gyakorlat Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Egy G-beli (ir) út hossza az út éleinek összhossza, $dist_\ell(u, v)$ pedig az (ir) uv-utak közül a legrövidebb hosszát jelöli. Az ℓ hosszfv *konzervatív*, ha nincs G-ben negatív összhosszúságú (ir) kör.

Def: Adott $G = (V, E)$ (ir) gráf, $r \in V$ és egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ élhosszfv. Az $f : V \to \mathbb{R}$ függvényt (r, ℓ)*-felső becslés*nek nevezzük, ha $f(r) = 0$ és $f(v) \geq dist_\ell(r, v)$ teljesül G minden v csúcsára. Az $e = uv$ *él menti javítás* esetén az $f(v)$ értéket a $\min\{f(v), f(u) + \ell(uv)\}$ értékkel helyettesítjük.

Dijkstra algoritmusa Input: $G = (V, E)$ (ir) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ nemneg hosszfv, $r \in V$ gyökér. Output: $dist_\ell(r, v)$ minden $v \in V$-re. Működés: Kezdetben $U_0 := \emptyset$, $f(r) = 0$ és $f(v) = \infty$ ha $v \neq r$. Az algoritmus i-edik fázisában ($i = 1, 2, \ldots, |V|$) a következő történik.
1. Legyen u_i az a v csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f(v)$ minimális és legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$.
2. Minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen élmenti javítást végzünk.
Az output a $|V|$-adik fázis utáni f függvény. Szokás megjelölni a végső $f(v)$ értékeket beállító éleket.

Állítás: Az algoritmus során megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják G-ben: az r gyökérből minden r-ből elérhető csúcshoz vezet olyan legrövidebb út is, ami csak megjelölt éleket tartalmaz.

Gyakorlatok

1. Egy irányított gráf csúcshalmaza $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és hosszaik pedig az alábbiak: $s(ab) = 5$, $s(ae) = 6$, $s(bc) = 4$, $s(bd) = 6$, $s(ca) = 3$, $s(cd) = 1$, $s(de) = 2$, $s(ec) = 2$, $s(ef) = 1$, $s(fb) = 3$, $s(fc) = 1$, $s(fd) = 1$. Dijkstra módszerével határozzuk meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát ill. egy a-gyökerű legrövidebb utak fáját.

2. A mellékelt táblázat a Dijkstra-algoritmus lefutását mutatja a G irányítatlan gráfon. Az egyes sorok az adott fázis utáni (r, ℓ)-felső becsléseket adják meg. a) Határozzuk meg, milyen sorrendben kerültek be az egyes csúcsok a KÉSZ halmazba, azaz adjuk meg G csúcsainak az algoritmus által meghatározott $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendjét! (ZH '20)
b) Mutassunk G-ben egy a-gyökerű legrövidebb utak fáját! (ppZH '20)
c) Határozzuk meg a ac él $\ell(ac)$ hosszát! (pZH '20)

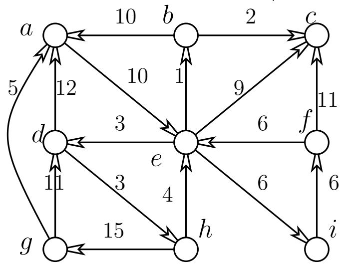
a	b	c	d	e
∞	∞	∞	0	∞
42	24	7	0	∞
33	16	7	0	77
24	16	7	0	18
22	16	7	0	18

3. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élhosszokkal együtt), amire a mellékelt táblázat a Dijkstra-algoritmus egy lehetséges futását dokumentálja.

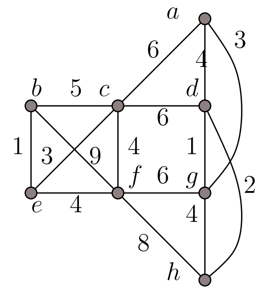
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	∞	∞	∞	∞	∞
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

---

4. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_i v_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a $v_i v_j$ él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van. (pZH '14)



5. Legyen G az ábrán látható irányított gráf, az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Van-e olyan, a c gyökérbe befelé irányított feszítőfája G-nek, amely minden x csúcsból tartalmazza G egy legrövidebb xc-útját? Ha van ilyen fa, akkor határozzunk is meg egyet. (ZH '18)



6. Legyen G az itt látható gráf. Futtassuk le a G gráfra a Dijkstra-algoritmust a b gyökérből. Határozzuk meg a c, d, f és g csúcsok U_i (KÉSZ) halmazba kerülésének összes lehetséges egymás közti sorrendjét egy b-ből indított Dijkstra-algoritmus lefutásakor. (pZH '23)

---

7. Adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen útszakaszok, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi idő alatt tud az adott szakaszon egy kerékpáros futár végigmenni. Egy, az f csúcsban tartózkodó kerékpáros futár azt a feladatot kapja, hogy a nála levő két csomagot tetszőleges sorrendben, de a lehető leggyorsabban kézbesítse ki a város b és c csomópontjaiba. Tervezzünk algoritmust, aminek a segítségével gyorsan meghatározható egy ilyen útvonal.
8. Tegyük fel, hogy az gráf élei között van egy negatív hosszúságú uv él, a többi él hossza pozitív, ráadásul G bármely irányított körén az élek hosszainak összege pozitív. Tervezzünk hatékony algoritmust, aminek segítségével a G gráf s csúcsából minden más csúcsába meghatározható egy legrövidebb út.
9. Egy középkori királyság úthálózata egy n-csúcsú irányítatlan gráffal adott (a csúcsok a városok, az élek a köztük vezető utak). Az A városból szeretnénk a B városba árut vinni, de bizonyos városok csak akkor engednek át minket a terményünkkel, ha vámot fizetünk nekik (az A és B városban nem kell vámot fizetni). A vám összege fix, nem függ az áru mennyiségétől, de a vám városonként más és más lehet. Adjunk algoritmust, ami a városonkénti vámok ismeretében gyorsan talál olyan útvonalat, amin a legkevesebb sarcot kell kifizetni.
10. Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf, élein egy nemnegatív $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény, egy r gyökérpont, valamint egy $e = uv$ éle G-nek. Legfeljebb egy Dijkstra-algoritmus lefuttatása segítségével határozzuk meg azt a legnagyobb x értéket, amennyivel az e él $l(e)$ hosszát úgy lehet csökkenteni, hogy a G gráfnak egyetlen w csúcsa se közeledjen r-hez, azaz, hogy $dist_{\ell'}(r, w) = dist_{\ell}(r, w)$ teljesüljön G minden w csúcsára, ahol ℓ' az $\ell(e)$ x-szel történő csökkentése utáni hosszfüggvényt jelöli.
11. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ élhosszfüggvény valamint egy $e = uv \in E$ él. Javasoljunk egy legfeljebb egy Dijkstra-algoritmust futtató eljárást annak a maximális értéknek a meghatározására, amennyivel G két csúcsának a távolsága megnövekszik akkor, ha töröljük az e élt G-ből.
12. Adott a $G = (V, E)$ irányított gráf, G éleinek egy F részhalmaza, G egy u csúcsa, valamint egy k pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy $t(e)$ jelöli azt, hogy mennyi ideig tart az e él mentén történő áthaladás. Javasoljunk gyors eljárást, amely a G inputban megadott u, v csúcsaira meghatározza G egy olyan uv-útját, ami legfeljebb k db F-beli élt tartalmaz, és ami az ilyen utak között a lehető leggyorsabban bejárható, azaz amire az út éleihez rendelt t értékek összege minimális. (*)

    Ha például G egy város közlekedési hálózata, amiben az egyes élhosszok azt muatják hogy mennyi ideig tart az egyik élvégpontból a másikba eljutni, és az F-beli élek a közvetlen buszos összeköttetést jelentik két csomópont között, a többi pedig a gyalogosat, akkor ebben a modellben az a feladat, hogy meghatározzuk, hogyan lehet leggyorsabban úgy eljutni egy csomópontból egy másikba, hogy összesen csak k buszjegyünk van.