

A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

4. gyakorlat Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: Gráfbejárás során ha a v csúcsot az e él mentén értjük el először, akkor e faél. A faélek alkotják a *bejárás fáját*. Az uv él *előreél*, ha u a bejárás fájában a v őse, *visszaél*, ha u a v leszármazottja, egyébként pedig *keresztél*.

Állítás: Irányítatlan gráf bejárása után az előreélek megegyeznek a visszaélekkel.

Def: A *szélességi bejárás* (BFS) inputja a $G = (V, E)$ gráf és egy r gyökércsúcs. E bejárás során az r csúcsot már a legelején elértnek tekintjük, és mindig a lehető legkorábban elért (befejezetlen) csúcsból próbálunk újabb csúcsot elérni. A *szélességi fa* (avagy *BFS-fa*) a szélességi bejárás fája.

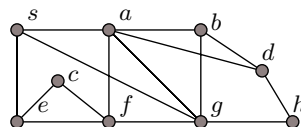
Megfigyelés: Szélességi bejárás után az alábbi tulajdonságok teljesülnek.

- (1) A csúcsok elérési és befejezési sorrendje megegyezik.
- (2) Gráfélnem ugorhat át faélt.
- (3) A BFS-fa egy legrövidebb utak fája: a gyökérből minden más csúcsba a G egy legrövidebb (legkevesebb élből álló) útját tartalmazza.
- (4) Minden gráfélnem legfeljebb egy szintet lép lefelé a BFS-fában.
- (5) Nincs előreél.

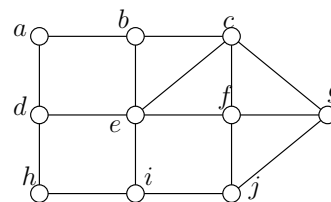
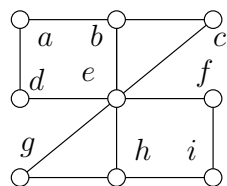
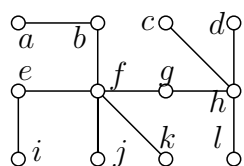
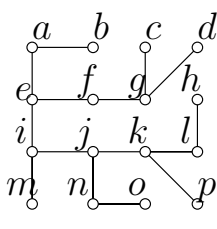
Gyakorlatok

1. A 8-csúcsú G gráfot az alábbi állítással adták meg: $\mathbf{a} : b, c$; $\mathbf{b} : a, d$; $\mathbf{c} : a, d$; $\mathbf{d} : b, c, e, f$; $\mathbf{e} : d, f, g$; $\mathbf{f} : d, e, g, h$; $\mathbf{g} : e, f, h$; $\mathbf{h} : f, g$. Keressünk G -ben a -gyökerű szélességi feszítőfát, osztályozzuk a BFS bejárás után a gráf éleit, valamint határozzuk meg G minden egyes csúcsának az a csúcstól mért távolságát!

2. a. A BFS az ábrán látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben járja be: $s, \square, \square, \square, h, \square, f, c, \square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsokkal, és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

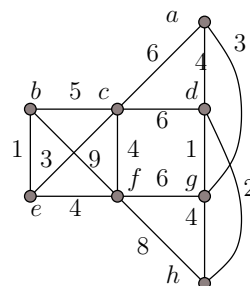


- b. Tartalmazhatja-e egy s -ből indított BFS bejáráshoz tartozó szélességi fa a dh élt?
3. Az alábbi ábra bal oldalán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G -beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e -ből induló éleit. (pZH'15)



4. Indítsunk a fenti harmadik ábrán látható G gráf d csúcsából szélességi bejárást és határozzuk meg a hozzá tartozó szélességi fát. Végrehajtható-e a fent említett BFS úgy, hogy bc faél legyen? (ZH '20)

5. Futtassuk le a mellékelt ábrán látható G gráf egy szélességi bejárását az e csúcsból indítva. Határozzuk meg, hogy ebben a bejárásban milyen sorrendben fejeztük be a c, d, f és g csúcsokat. Határozzuk meg e négy csúcs összes olyan sorrendjét ami egy e -ből indított BFS bejárás befejezési sorrendjéből adódhat. (Az élekre írt számokkal ne törődjünk.) (ZH '23)



6. A fenti második ábrán látható a G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G -ben? (pZH'14)

7. Legfeljebb hány keresztél keletkezik a 3. feladat alatti negyedik ábrán látható G gráf e gyökérből indított BFS bejárása után?
-
8. Tervezzünk olyan algoritmust, ami a G inputgráf megadott e éléről eldönti, hogy van-e G -nek e -t tartalmazó köre, és ha van akkor megtalál egy legrövidebbet.
 9. Tegyük fel, hogy a G irányított gráf minden csúcsa a piros, fehér és zöld színek valamelyikére van kiszínezve. Tervezzünk hatékony algoritmust, ami bármely piros u és zöld v csúcs esetén megtalál egy olyan legrövidebb (azaz lehető legkevesebb élből álló) uv -utat, ami piros csúcsokon indul, ezt követően átvált fehérre, és legalább egy fehér csúcsot használ, majd zöld csúcsra vált, és végig ilyeneken halad v -ig.
 10. Határozzuk meg az összes olyan G irányítatlan gráfot, amire igaz, hogy G tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag.
 11. Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs legfeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
 12. Határozzuk meg az összes olyan 10-csúcsú, összefüggő gráfot, aminek minden BFS-fájában csak első- és harmadfokú csúcsok fordulnak elő. (*) (Kőnig '21)