A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

3. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

Def: Ha $G=(V,E)$ egy gráf és $k:E\to\mathbb{R}$ az éleken értelmezett költségfüggvény, akkor G tetszőleges E' élhalmazának $\tilde{k}(E')$ *költsége* a E'-beli élek összköltsége. Az $F\subseteq E$ élhalmaz *minimális költségű feszítőfa (mkffa)*, ha (V,F) a G feszítőfája, és nem drágább a G egyetlen feszítőfájánál sem, azaz $\tilde{k}(F)\le\tilde{k}(F')$ teljesül G minden (V,F') feszítőfájára. *min. ktg fesz. erdő* definíciója hasonló.

Kruskal (mohó) algoritmus: Input: $G=(V,E)$, $k:E\to\mathbb{R}_+$ ktgfüggvény. Output: $F\subseteq E$ Működés: Legyen $F_0=\emptyset$, és $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$, ahol $k(e_1)\le k(e_2)\le\ldots\le k(e_m)$. Az output $F=F_m$, ahol $i=1,2,\ldots,m$-re

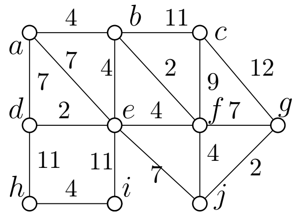
$$F_i:=\begin{cases}F_{i-1}\cup\{e_i\} & \text{ha } F_{i-1}\cup\{e_i\} \text{ körmentes}\\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1}\cup\{e_i\} \text{ tartalmaz kört.}\end{cases}$$

Tétel: Legyen $G=(V,E)$ egy gráf és $k:E\to\mathbb{R}$ egy tetsz. költségfüggvény, (V,F) pedig a G egy feszítőfája. F pontosan akkor mkffa, ha minden c-re teljesül, hogy F tartalmazza a G legfeljebb c költségű (olcsó) élei alkotta gráf egy feszítő erdejét.

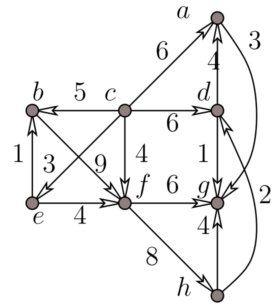
Tétel: Legyen $G=(V,E)$ egy gráf és $k:E\to\mathbb{R}$ egy tetsz. költségfüggvény, (V,F) a G egy mkffája (V,F) pedig a G egy tetszőleges feszítőfája. Tfh $F=\{f_1,\ldots,f_{n-1}\}$ és $F'=\{f'_1,\ldots,f'_{n-1}\}$, ahol $k(f_1)\le\ldots\le k(f_{n-1})$ ill. $k(f'_1)\le\ldots\le k(f'_{n-1})$. Ekkor $k(f_i)\le k(f'_i)$ teljesül $\forall 1\le i\le n-1$ esetén.

Tétel: A Kruskal-algoritmus F outputja a G egy min költségű feszítő erdejének élhalmaza.

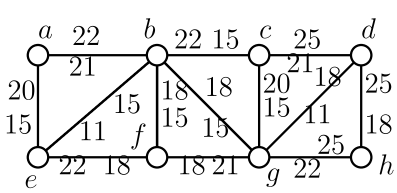
Gyakorlatok



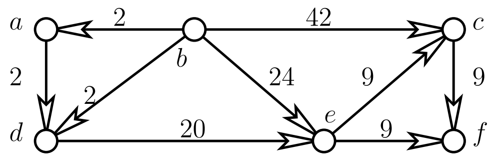
1. Keressünk a fenti ábrán látható G gráfban mkffát! Hányféle outputja lehet a G-n futtatott Kruskal-algoritmusnak? Hány minimális költségű feszítőfája van G-nek?



2. Legyen G az ábrán látható gráf **irányítatlan** változata. Határozzuk meg a G gráf egy minimális költségű feszítőfáját, és dokumentáljuk az algoritmus futását. Lehetséges-e egy 6 költségű él költségét 22-re növelni úgy, hogy az új költségfüggvény szerint minimális költségű feszítőfa költsége ugyanannyi maradjon, mint amennyi az eredeti költségfüggvény esetén volt? (Az élek irányításától tekintsünk el.) (pZH '23)



3. A jobb oldali ábrán látható $G=(V,E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amin G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15)



4. Legfeljebb mennyivel a) csökken ill. b) növekszik a minimális költségű feszítőfa költsége, ha a bal oldali ábrán látható gráf egyetlen élét törölhetjük, és ugyanilyen költséggel két tetszőleges csúcs között felvehetünk egy új élt? (Az élek irányításától tekintsünk el.) (ZH '22)

---

5. Legyen az 1. feladathoz tartozó gráfban a cf él költsége p. Hogyan válasszuk p-t ahhoz, hogy legyen G-nek olyan mkffája, ami a cf élt tartalmazza?

6. Adott a $G = (V, E)$ gráf és a $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv, valamint G csúcsainak egy piros és zöld színnel színezése. Adjunk gyors eljárást olyan minimális összköltségű $F \subseteq E$ élhalmaz megkeresésére, amire minden piros csúcsból vezet F-beli út (a) legalább egy ill. (b) minden zöld csúcsba.
7. Tegyük fel, hogy a G gráf minden csúcsa egy raktárnak vagy egy üzletnek felel meg, két csúcs között futó él pedig a két épület között futó útszakasznak felel meg. Minden élhez tartozik egy pozitív érték, ami azt mutatja meg, hogy mekkora bérleti díjat kell fizetni annak érdekében, hogy szállításra igénybe vehessük az adott útszakaszt. Javasoljunk olyan algoritmust, aminek segítségével meghatározható éleknek egy olyan halmaza, amelyeken minden üzlet elérhető legalább egy raktárból, és emellett a kiválasztott élekhez tartozó bérleti díjak összege a lehető legkisebb.

---

8. Tegyük fel, hogy ha az élsúlyokkal ellátott G gráfban az e él költségét 11-nek, ill. 77-nek választjuk, akkor a minimális költségű feszítőfa költsége 1956 ill. 1989 lesz. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége akkor, ha az e él költsége 42? (pZH '20)
9. Legyen $G = (V, E)$ véges, irányítatlan gráf. Tegyük fel, hogy a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvényre ugyanúgy 14 a minimális költségű feszítőfa költsége, mint a k' költségfüggvényre, ahol $k'(e) = 2k(e) - 1$ a G minden e élére. Mennyi a minimális költségű feszítőfa költsége a $k''(e) = 2k(e) + 1$ képlettel megadott k'' költségfüggvényre? (ZH '20)
10. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
11. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal-algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
12. Adott egy négyzet négy csúcsa a síkon. Hogyan lehet a lehető legrövidebb összhosszúságú vonalak meghúzásával elérni, hogy a meghúzott vonalakat követve a négy csúcs bármelyikéből el lehessen jutni a másik három csúcs bármelyikébe? (!)
13. Adott a $G = (V, E)$ összefüggő gráf és élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Egy lépésben G egy tetszőleges élét megépíthetjük, ám ennek hatására minden meg nem épített él költsége megduplázódik. Tervezzünk hatékony algoritmust, ami a lehető legolcsóbban építi meg G egy feszítőfáját.(*) (Kőnig '22)