

# A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

2. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

## Tudnivalók

**Def:** A  $G$  véges, egyszerű gráf *erdő*, ha  $G$  körmentes. A  $G$  gráf akkor *fa*, ha  $G$  összefüggő erdő.

**Állítás:** Ha az  $n$  csúcsú  $G$  erdőnek  $k$  komponense van, akkor éleinek száma  $|E(G)| = n - k$ .

**Köv.:** Ha  $F$  fa, akkor  $|E(F)| = |V(F)| - 1$ . **Köv.:** Ha egy  $G$  véges gráfra az alábbiak közül 2 teljesül, akkor igaz rá a harmadik is: (1)  $G$  összefüggő, (2)  $G$  körmentes, (3)  $|V(G)| = |E(G)| - 1$ .

**Def:** A  $G$  gráf  $v$  csúcsa *levél* (ill. *izolált pont*), ha  $d(v)=1$  (ill. ha  $d(v) = 0$ ).

**Állítás:** Tfh  $F$  fa. Ekkor (1)  $(F - e)$ -nek pontosan két komponense van  $\forall e \in E(F)$ -re. (2)  $F$ -nek pontosan egy  $uv$ -útja van  $\forall u, v \in V(F)$ -re. (3)  $(F + e)$ -nek pontosan egy köre van  $\forall e \notin E(F)$ -re. (4) Ha  $|V(F)| \geq 2$ , akkor  $F$ -nek legalább két levele van.

**Def:**  $F$  a  $G$  gráf *feszítőfája* (*ffája*), ha  $F$  egy  $G$ -ből éltörlésekkel kapható fa.

**Állítás:** ( $G$ -nek van feszítőfája)  $\iff$  ( $G$  öf.)

## Gyakorlatok

- Hány levele lehet egy olyan fának, aminek van egy 42-fokú  $v$  csúcsa? (Határozzuk meg mindazon  $\ell$  számokat, amikre van olyan  $\ell$ -levelű  $F$  fa, aminek van 42-edfokú csúcsa.)
  - Hány pontja van annak a  $T$  fának, melyre  $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$ ? (✓)
  - Tegyük fel, hogy  $G$  egyszerű gráf és  $n$  csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ha  $d(v) \geq \frac{n}{2}$  teljesül  $G$ -nek minden csúcsára, akkor  $G$  összefüggő. (✓)
- 
- Lehet-e néhány lépésben egy 42 összefüggő komponensből álló, 88 csúcsú, 111 élű gráfból összefüggő gráfot képezni, ha minden lépésben két élt törölünk és egy élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.) (ZH '22)
  - Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű gráfnak 100 csúcsa van, melyek bármelyikének a fokszáma legalább 33, továbbá  $G$ -nek van olyan csúcsa, melyből legalább 66 él indul. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  összefüggő. (ZH '15)
  - Lehet-e néhány lépésben egy 42 komponensből álló, 77 csúcsú, 66 élű egyszerű gráfból körmentes, egyszerű gráfot képezni, ha minden lépésben egy élt törölünk és két élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.) (pZH '22)
  - Tegyük fel, hogy az  $F$  fának csak első-, másod- és harmadfokú csúcsai vannak, utóbbiból pontosan tíz darab. Határozzuk meg  $F$  leveleinek (azaz elsőfokú csúcsainak) a számát. (pZH '16)
  - Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
  - Tegyük fel, hogy  $G$  egy 42-csúcsú és 42-élű, egyszerű, összefüggő gráf. Mutassuk meg, hogy  $G$ -nek legalább három feszítőfája van.
- 
- A  $G$  egyszerű gráfnak  $2k$  pontja van, minden pontjának foka legalább  $k - 1$ , és  $G$ -nek létezik egy legalább  $k$ -adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy ha  $k \geq 1$ , akkor  $G$  összefüggő.
  - Legyenek  $e, f$  és  $g$  a  $G$  egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf összefüggő marad, bármely élet is hagyjuk el, ám a  $G - e - f$  és a  $G - e - g$  gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a  $G - f - g$  gráf sem összefüggő.
  - Tegyük fel, hogy az  $F$  fának 101 csúcsa van és  $F$  leveleit pirosra színeztük. Legyen  $F'$  az a fa, amit  $F$ -ből a pirosra színezett csúcsok törlésével kapunk. Színezzük  $F'$  leveleit fehérre, és az ezután is színezetlen csúcsokat pedig zöldre. Tudjuk, hogy  $F'$  minden zöld csúcsa negyedfokú és a fehér csúcsok száma 21-gyel több a zöld csúcsokénál. Hány piros csúcsa van  $F$ -nek?(ZH '23)
  - Igazoljuk, hogy minden fa megkapható egy csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy új levelet adunk az addig felépített gráfhoz. (!)
  - Ha  $T_1$  és  $T_2$  két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és  $e_1$  a  $T_1$  tetszőleges éle, akkor létezik  $T_2$ -nek egy  $e_2$  éle, hogy  $T_1 - e_1 + e_2$  és  $T_2 - e_2 + e_1$  is fa.
  - Egy  $n \times n$  méretű  $T$  táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy  $T$ -nek van olyan oszlopa, aminek törlése után a kapott táblázatban továbbra sincs két egyforma sor. (\*)