A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

1. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás és Varga Kitti

Tudnivalók

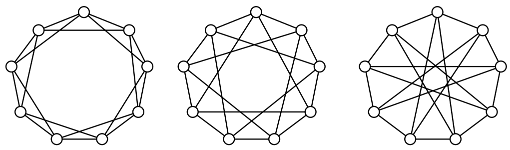
Kézfogás-lemma (KFL): Ha G véges gráf, akkor fokszámösszege $2|E(G)|$.
Def: K_n az n-pontú *teljes gráf*: bármely két pontja össze van kötve.
Def: G *reguláris*, ha fokszámai megegyeznek. $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$ G max ill. min fokszáma.
Def: A G egyszerű gráf *komplementere* a $\overline{G} := (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ gráf. (Két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédos G-ben.)
Def: A G_1 és G_2 gráfok *izomorfak* ($G_1 \cong G_2$), ha G_1 és G_2 csúcsai is megszámozhatók 1-től n-ig úgy, hogy $\forall$ i, j-re pontosan annyi él fut i-ből j-be G_1-ben, mint G_2-ben. (Különöböző csúcsok különöböző számot kapnak, és minden számot felhasználunk.)
Def: A G gráf *összefüggő (öf)*, ha bármely két pontja között vezet séta.
Def: $K \subseteq V(G)$ a G gráf *komponense*, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G-séta, de nem létezik uv-séta ha $u \in K$, $v \in V(G) \setminus K$.
Élhozzáadási lemma (ÉlHaL): A $G + e$ gráfra az alábbiak közül pontosan egy igaz:
(1) e-n keresztül nincs kör, és $G + e$-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek,
(2) e-n keresztül van kör, és $G + e$-nek ugyanannyi komponense van, mint G-nek.

Jelmagyarázat

(✓): alapvető ismeret, rutinfeladat, (!): fontos trükk, (*): nehéz feladat

Gyakorlatok

1. Helyezzünk két világos és két sötét huszárt egy 3×3-as sakktábla négy sarkába úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes mezőkön álljanak. A huszárokkal a sakkban szokásos módon lépünk úgy, hogy sosem állhat egyszerre két figura ugyanazon a mezőn. Elérhető-e így, hogy a huszárok a tábla sarkaiban állnak, és az átellenes huszárok különböző színűek? (!)
2. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai a.) $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. b.) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$? (✓)
3. Határozzuk meg, mik a 2-reguláris gráfok. Hogy néznek ki azon G gráfok, amelyekre $\Delta(G) \leq 2$?
4. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. (✓) (Igazoljuk azt is, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.)
5. Igazoljuk, hogy ha $u \in V(G)$ foka páratlan, akkor van olyan uv-út, amire $u \neq v$ és $d(v)$ páratlan. (pZH '15)
6. Állapítsuk meg, hogy az ábrán látható három gráf közül melyek izomorfak egymással.



---

7. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
8. Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcsú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$, akkor G nem egyszerű. (pZH '14)
9. Mutassuk meg, hogy bármely 11 csúcsú és 45 élű gráfnak van legalább 9-edfokú csúcsa. (✓)
10. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak? (V '00)
11. Találjuk meg (izomorfia erejéig) mindazon n csúcsú és m élű egyszerű gráfokat, melyekre a) $n = 5, m = 2$ b) $n = 5, m = 8$ c) $n = 5, m = 3$. (✓)
12. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!

---

13. Igazoljuk, hogy tetsz. egyszerű gráf élei irányíthatók úgy, hogy ne keletkezzen irányított kör.(!)
14. Bizonyítsuk be, hogy bármely 13 ember között van olyan, aki legalább 6 másikat ismer vagy van köztük 3 olyan, akik páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretség kölcsönös.)
15. Mutassuk meg, hogy ha a T téglalapot sikerült olyan téglalapokkal kiparkettázni, amelyek mindegyikének van egész hosszúságú oldala, akkor T-nek is van egész hosszúságú oldala. (*)