A számítástudomány alapjai 2024. I. félév

12. gyakorlat. Összeállította: Varga Kitti

Tudnivalók

Determinánsok szorzástétele. Ha A és B is $(n \times n)$-es mátrixok, akkor $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Def: Egy $(n \times n)$-es A mátrix inverzén azt az $(n \times n)$-es A^{-1} mátrixot értjük, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ teljesül.

Tétel: Egy $(n \times n)$-es A mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$.

Gyakorlatok

1. Határozzuk meg az $(1, 2, 1)$ és a $(5, 2, 4)$ vektorok skaláris szorzatát.

2. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Döntsük el, hogy az alábbi mátrixműveletek elvégezhetők-e és ha igen, adjuk meg az eredményt.
(a) $2A + 3B$ (b) $A \cdot B$ (c) $B \cdot A$ (d) $A \cdot B + 2B$ (e) $B \cdot B^T$

3. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

4. (a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
(b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk ezen kívül, hogy az $A \cdot A^\top$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^\top \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^\top$, valamint az $A^\top \cdot A$ mátrixokat.

6. Létezik-e olyan mátrix, melynek az alábbi mátrix az inverze? Ha igen, adjuk is meg.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Határozzuk meg az alábbi A és B mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

8. Az $(n \times n)$-es A és B mátrixokról tudjuk, hogy $|A| \neq 0$, valamint hogy $AB = 0$. Határozzuk meg a B mátrixot.

---

9. A 100×100-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A 100×100-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az AB szorzatot.

10. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.

11. Oldjuk meg az alábbi A és B mátrixokra az $X \cdot A = B$ mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre az egyenlet fennáll.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 12 & 24 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

12. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra.
    (a) $(AB)^2 = A^2B^2$
    (b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
    (c) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
    (d) $(A - I_n)^2 = A^2 - 2A + I_n$

13. Az $(n \times n)$-es A és B mátrixokról tudjuk, hogy $|A| \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy egyértelműen léteznek olyan $(n \times n)$-es C és D mátrixok, amelyekre $CA = B = AD$ teljesül.

14. Egy (5×5)-ös A mátrixnak pontosan hat olyan (3×3)-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy A nem invertálható.