Osztozkodási játékok

Algoritmikus játékelmélet

6. gyakorlat

2024.

Osztozkodási játék. Adott $n \in \mathbb{N}_+$ játékos, akik a $[0,1[$ intervallumot akarják felosztani egymás között.

Elosztás alatt egy olyan $(A_1, \ldots, A_n)$ rendezett n-est értünk, ahol

– tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén A_i véges sok páronként diszjunkt, balról zárt és jobbról nyílt intervallumnak az uniója,

– az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok a $[0,1[$ intervallum egy partícióját alkotják (azaz páronként diszjunktak és az uniójuk $[0,1[$).

Tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén adott az i-edik játékosnak az f_i **értékelő eloszlásfüggvénye**, melyre a következők teljesülnek: $f_i\colon [0,1] \to [0,1]$ folytonos, monoton növekvő, $f_i(0) = 0$ és $f_i(1) = 1$.

Az i-edik játékos **értékelő függvénye** egy olyan μ_i függvény, hogy $\mu_i(\emptyset) = 0$, és tetszőleges $k \in \mathbb{Z}_+$ és $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_k < b_k < 1$ esetén

$$\mu_i\left(\bigcup_{j=1}^{k} [a_j, b_j[\right) = \sum_{j=1}^{k} \big(f_i(b_j) - f_i(a_j)\big).$$

Arányos elosztás. Egy $(A_1, \ldots, A_n)$ elosztás arányos, ha tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \geq 1/n$.

Irigységmentes elosztás. Egy $(A_1, \ldots, A_n)$ elosztás irigységmentes, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$.

Oszt és választ. Két játékos esetén az egyik játékos a saját értékelő függvénye szerint két egyenlő részre osztja az elosztandó halmazt, majd a másik játékos kiválasztja ezek közül a saját értékelő függvénye szerinti nemrosszabbat.

Fink-eljárás. Rekurzívan definiáljuk: ha az első $n-1$ játékos már arányosan megosztoztak az $(n-1)$-személyes Fink-eljárással, akkor felosztják a saját értékelő függvényük szerint a saját részüket n egyenlő részre, és az n-edik játékos mindenkitől választ a saját értékelő függvénye szerint egy-egy legjobb részt.

Tasnádi-eljárás. Az első játékos a saját értékelő függvénye szerint n egyforma részre osztja az elosztandó halmazt, és mind az n részhez előkészít $n-1$ darab jegyet. A többi játékos mindegyike elvesz $n-1$ darab különböző jegyet aszerint, hogy melyik $n-1$ részt értékeli a saját értékelő függvénye szerint nem az egyik legrosszabbra. A fel nem használt $n-1$ darab jegy az első játékosnál marad. Ezután az n rész mindegyikén $n-1$ játékos osztozkodik tovább a Tasnádi-eljárással (melyben az első játékos megfelelő multiplicitással vesz részt).

A mozgó késes eljárás diszkrét változata. Minden játékos megjelöli a saját értékelő függvénye szerint azt a legbaloldalibb szeletet, ami neki megfelel. A legbaloldalibb jelölővel rendelkező játékos megkapja a kért szeletét, és a többi játékos a megmaradt intervallumon folytatja az eljárást.

Even–Paz-eljárás. Minden játékos megjelöli a saját értékelő függvénye szerinti $\lfloor n/2 \rfloor : \lceil n/2 \rceil$ osztópontot. Vágjuk el az intervallumot a balról számított $\lfloor n/2 \rfloor$-edik osztópontnál (a több játékos által is megjelölt osztópontokat megfelelő multiplicitással számoljuk). A vágástól balra jelölő játékosok a baloldali részen, a többiek a jobboldali részen osztoznak tovább az Even–Paz-eljárással.

1. Határozzuk meg a $[0,1[$ intervallum egy arányos elosztását a Fink-eljárással, ha a játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő. Irigységmentesek lesznek-e az így kapott elosztások?
   (a) $f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = x^2$
   (b) $f_1(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/4, \\ 1, & \text{ha } 1/4 \le x \le 1, \end{cases} \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = x^3$
2. Határozzuk meg a $[0,1[$ intervallum egy arányos elosztását a Tasnádi-eljárással, ha a játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő. Irigységmentesek lesznek-e az így kapott elosztások?
   (a) $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \begin{cases} x/2, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2, \\ (3x-1)/2, & \text{ha } 1/2 \le x \le 1, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/4, \\ (2x+1)/3, & \text{ha } 1/4 \le x \le 1 \end{cases}$
   (b) $f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = x^4$
3. Határozzuk meg a $[0,1[$ intervallum egy arányos elosztását a mozgó késes eljárás diszkrét változatával, ha a játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő. Irigységmentesek lesznek-e az így kapott elosztások?
   (a) $f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = x^4$
   (b) $f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = \sqrt{x}$
4. Határozzuk meg a $[0,1[$ intervallum egy arányos elosztását az Even–Paz-eljárással, ha a játékosok értékelő eloszlásfüggvénye a következő. Irigységmentesek lesznek-e az így kapott elosztások?
   (a) $f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = \sqrt{x}, \qquad f_4(x) = x^4, \qquad f_5(x) = \min(2x, 1)$
   (b) $f_1(x) = \sqrt{5}x, \qquad f_2(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad f_3(x) = x^2, \qquad f_4(x) = x$
5. Adjunk eljárást arra az esetre, amikor az n játékos nem egyenlő mértékben akar osztozni a $[0,1[$ intervallumon, hanem minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az i-edik játékoshoz adott egy $d_i \in \mathbb{Z}_+$ követelés, és olyan $(A_1, \ldots, A_n)$ elosztást keresünk, melyre tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \ge d_i/D$ teljesül, ahol $D := \sum_{i=1}^{n} d_i$.
6. Adjunk eljárást arra az esetre, amikor az n játékos úgy akar osztozni a $[0,1[$ intervallumon, hogy tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mu_i(A_i) \le 1/n$ teljesüljön (azaz például torta helyett házimunkán osztoznak a játékosok).