Tiszta és kevert Nash-egyensúly

ALGORITMIKUS JÁTÉKELMÉLET

4. gyakorlat

2024.

Tiszta Nash-egyensúly. Az $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ stratégiaválasztás egy tiszta Nash-egyensúly, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ és $s'_i \in S_i$ esetén

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Kevert stratégia. Tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén egy S_i halmaz feletti valószínűségi eloszlást az i-edik játékos kevert stratégiájának nevezünk. Az i-edik játékos kevert stratégiáinak halmazát a Δ_i szimbólummal jelöljük.

Kevert Nash-egyensúly. Az $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n$ kevert stratégiaválasztás kevert Nash-egyensúly, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ és $\sigma'_i \in S_i$ esetén az i-edik játékos várható nyeresége a $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ kevert stratégiaválasztás mellett legalább akkora, mint a $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ mellett, azaz

$$u_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \geq u_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n).$$

1. Határozzuk meg az alábbi játékokban az összes tiszta és kevert Nash-egyensúlyt.

   (a) Szarvasvadászat.

	szarvas	nyúl
szarvas	$(4,4)$	$(0,2)$
nyúl	$(2,0)$	$(1,1)$

   (b) Háború és béke.

	háború	béke
háború	$(-1,-1)$	$(0,-2)$
béke	$(-2,0)$	$(2,2)$

   (c) Nemek harca: egy házaspár két tagja egymástól függetlenül dönt arról, hogy balett előadásra vagy focimeccsre menjenek-e.

	balett	meccs
balett	$(3,2)$	$(1,1)$
meccs	$(0,0)$	$(2,3)$

2. Iterált eliminálás segítségével keressük meg az összes kevert Nash-egyensúlyt az alábbi stratégiai játékokban.

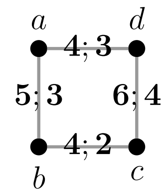
   (a)

	X	Y	Z
A	$(3,4)$	$(5,3)$	$(2,3)$
B	$(2,5)$	$(3,9)$	$(4,6)$
C	$(3,1)$	$(2,5)$	$(7,4)$

   (b)

	X	Y	Z
A	$(5,3)$	$(4,3)$	$(1,1)$
B	$(2,4)$	$(3,4)$	$(6,2)$
C	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,7)$

3. Tekintsük az alábbi gráfot, és vegyük azt a kétszemélyes stratégiai játékot, amiben a sorjátékos az a csúcsból a c-be, az oszlopjátékos pedig a b csúcsból a d-be szeretne eljutni. Minden élhez két költség van rendelve: az első (azaz a nagyobbik) szám jelenti annak a költségét, amikor egy játékos egyedül használja az adott élt, a második (azaz a kisebbik) szám pedig az az egy főre eső költség, amikor mindkét játékos használja az élt. Határozzuk meg a tiszta és kevert Nash-egyensúlyokat.



4. Egy választáson két jelölt indul, A és B. A választókerületükbe tartozó minden választónak 2 pontot ér, ha az ő támogatottja nyer, -2 pontot ér, ha a támogatottja veszít, és 0 pontot ér, ha a választás döntetlennel zárul. Ezen felül minden választónak 1 pontjába kerül elmenni szavazni.
   (a) Határozzuk meg a tiszta és kevert Nash-egyensúlyokat, ha a választókerületben 2 választó van, és közülük az egyik A-t, a másik pedig B-t támogatja.
   (b) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat, ha a választókerületben 3 választó van, és közülük ketten A-t támogatják, a harmadik pedig B-t.
   (c) Határozzuk meg tetszőleges $k \in \mathbb{N}_+$ esetén a tiszta Nash-egyensúlyokat, ha a választókerületben $2k$ darab választó van, és közülük k darab A-t, a maradék k darab pedig B-t támogatja.

5. Tekintsük a következő százlábú játékot. Két játékos játszik, akik felváltva lépnek. Először a kezdőjátékos dönt, hogy kiszáll a játékból, és ekkor mindkét játékos 1-1 pontot kap, vagy folytatja a játékot. Utóbbi esetben a második játékos dönt, hogy kiszáll a játékból, és ekkor ő 3 pontot, a kezdőjátékos pedig 0 pontot kap, vagy folytatja a játékot. Utóbbi esetben a kezdőjátékos dönt ismét, hogy kiszáll a játékból, és ekkor mindkét játékos 2-2 pontot kap, vagy folytatja a játékot. Általánosan, tetszőleges $k \in \{1, \dots, 99\}$ esetén, ha a kezdőjátékos a saját k-adik körében úgy dönt, hogy kiszáll, akkor mindkét játékos külön-külön k pontot kap, ha pedig a második játékos a saját k-adik körében száll ki, akkor ő $k+2$, a kezdőjátékos pedig $k-1$ pontot kap. Ha a második játékos a saját 99. körében sem száll ki, akkor a játék véget ér, és mindkét játékos 100-100 pontot kap.
   (a) Írjuk fel a játékot stratégiai játékként.
   (b) Határozzuk meg a tiszta Nash-egyensúlyokat.

6. Két játékos választ egy-egy számot az $\{1, \dots, n\}$ halmazból, ahol $n \geq 2$ egy tetszőleges egész szám. Ha a két szám megegyezik, akkor a sorjátékos 1 pontot, az oszlopjátékos -1 pontot kap; minden más esetben pedig senki sem kap pontot. Határozzuk meg a tiszta és kevert Nash-egyensúlyokat.

7. Két játékos választ egy-egy számot az $\{1, \dots, n\}$ halmazból, ahol $n \geq 2$ egy tetszőleges egész szám. Ha a két szám különbségének abszolútértéke 1, akkor a sorjátékos 1 pontot, az oszlopjátékos -1 pontot kap; minden más esetben pedig senki sem kap pontot. Határozzunk meg egy tetszőleges kevert Nash-egyensúlyt.

8. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ stratégiaválasztás maximalizálja a $\sum_{i=1}^n u_i(\underline{s})$ értéket, akkor $\underline{s}$ Pareto-optimális.
   (b) Mutassuk meg, hogy van olyan stratégiai játék, aminek létezik olyan $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ Pareto-optimális stratégiaválasztása, melyre a $\sum_{i=1}^n u_i(\underline{s})$ érték nem maximális.
   (c) Legyen $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}_+$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\underline{s} = (s_1, \dots, s_n)$ stratégiaválasztás maximalizálja a $\sum_{i=1}^n w_i u_i(\underline{s})$ értéket, akkor $\underline{s}$ Pareto-optimális.
   (d) Tekintsük a következő, sorozatos diktatúrának nevezett eljárást. Vegyük a játékosok egy tetszőleges sorrendjét, és a soron következő játékos válassza ki mindig a korábbi játékosok kiválasztásához képest az összes, számára legjobb stratégiáját. Mutassuk meg, hogy ezzel az eljárással mindig (legalább egy) Pareto-optimális stratégiát kapunk.

(e) Mutassuk meg, hogy van olyan stratégiai játék, aminek létezik olyan $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ Pareto-optimális stratégiaválasztása, melyet a sorozatos diktatúrával nem lehet megtalálni.