Stratégiai játékok

Algoritmikus játékelmélet

3. gyakorlat

2024.

Stratégiai játék. Adott $n \in \mathbb{N}_+$ játékos, és tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén adott az i-edik játékoshoz a lehetséges stratégiáinak egy véges S_i halmaza, valamint egy $u_i\colon S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ nyereségfüggvény. Minden játékos ismeri a többiek lehetséges stratégiáit és nyereségfüggvényeit. A játék elején a játékosok egymástól függetlenül kiválasztanak egy-egy stratégiát azzal a céllal, hogy maximalizálják a saját nyereségüket.

Pareto-optimális stratégiaválasztás. Az $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ stratégiaválasztás Pareto-optimális, ha nem létezik olyan $(s'_1, \ldots, s'_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ stratégiaválasztás, melyre a következők teljesülnek:

- minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $u_i(s_1, \ldots, s_n) \leq u_i(s'_1, \ldots, s'_n)$, és
- létezik olyan $j \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $u_j(s_1, \ldots, s_n) < u_j(s'_1, \ldots, s'_n)$.

Gyenge dominálás. A $z \in S_i$ stratégia gyengén dominálja a $z' \in S_i$ stratégiát, ha tetszőleges $s_1 \in S_1, \ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots, s_n \in S_n$ esetén

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Erős dominálás. A $z \in S_i$ stratégia erősen dominálja a $z' \in S_i$ stratégiát, ha tetszőleges $s_1 \in S_1, \ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots, s_n \in S_n$ esetén

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n) > u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

1. Adott a K_n teljes gráf, ahol $n \geq 2$ egy egész szám. A soron következő játékos kiválasztja K_n egy (korábban még egyik játékos által sem választott) élét. Az a játékos nyer, aki először kiválasztja egy feszítőfa minden élét. Mutassuk meg, hogy a kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.
2. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathcal{H}$ hipergráfon játszott építő–építő játékban a kezdőjátékosnak mindig van nemvesztő stratégiája.
3. Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathcal{H}$ hipergráfon játszott építő–romboló játékban a romboló játékosnak van nemvesztő stratégiája, akkor a $\mathcal{H}$ hipergráfon játszott romboló–építő játékban is van neki nemvesztő stratégiája.
4. Legyen $G = (V, E)$ az a gráf, amit egy n-csúcsú körből úgy kapunk, hogy a körön minden másodszomszédos csúcspár közé is behúzunk egy élt (ahol $n \geq 3$ egy egész szám). A soron következő játékos kiválaszt egy (korábban még egyik játékos által sem választott) V-beli csúcsot. Az a játékos veszít, aki először kiválasztja valamely E-beli él mindkét végpontját. Mutassuk meg, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája.
5. Határozzuk meg az alábbi játékokban a Pareto-optimális stratégiákat.

   (a) Szarvasvadászat: két vadásznak kell arról döntenie, hogy szarvasra vagy nyúlra vadásznak-e.

	szarvas	nyúl
szarvas	$(4, 4)$	$(0, 2)$
nyúl	$(2, 0)$	$(1, 1)$

(b) Háború és béke: két országnak kell arról döntenie, hogy háborúval oldják-e meg a konfliktusukat.

	háború	béke
háború	$(-1,-1)$	$(0,-2)$
béke	$(-2,0)$	$(2,2)$

(c) Hát ebben a játékban?

	$\triangle$	$\square$
✓	$(24,24)$	$(42,\sqrt[3]{5})$
$\circ$	$(\pi,33)$	$(0,0)$

(d) Tószennyezés: egy tó köré épült három gyár dönt arról, hogy szennyezzék vagy tisztítsák-e a tó vizét a következő évben. A vizet szennyezni ingyenes, a tisztítás azonban 1 egységnyi pénzbe kerül. Ha azonban legalább két gyár szennyezi a vizet, akkor a tó vize teljesen használhatatlanná válik, és minden gyárnak külön-külön 3 egységnyi pénzbüntetést kell fizetnie.

Ha a 3. gyár szennyez:

1. gyár \ 2. gyár	szennyez	tisztít
szennyez	$(-3,-3,-3)$	$(-3,-4,-3)$
tisztít	$(-4,-3,-3)$	$(-1,-1,0)$

Ha a 3. gyár tisztít:

1. gyár \ 2. gyár	szennyez	tisztít
szennyez	$(-3,-3,-4)$	$(0,-1,-1)$
tisztít	$(-1,0,-1)$	$(-1,-1,-1)$

6. Két diák közösen dolgozik egy csoportmunka keretében egy tanórán, ahol a házi feladatot együtt adják be. Mindkét diák elég ügyes ahhoz, hogy egyedül is megoldja hibátlanul a kiadott feladatot. A leadási határidő előtti napon mindkét diák választhat, hogy lemegy a könyvtárba és megoldja a házi feladatot, vagy elmegy bulizni a barátaival. Ha legalább az egyikük úgy dönt, hogy lemegy a könyvtárba, akkor a hibátlanul megoldott házi feladat mindkettejüknek 10-10 pontnyi örömet okoz, viszont ha egyikük sem dolgozik, akkor a meg nem oldott házi feladat mindkettejüknek 2-2 pontnyi szomorúságot okoz. Azonban, ha csak az egyik diák megy le a könyvtárba, akkor neki egyedül megoldani a feladatot 7 pontnyi erőfeszítésbe kerül, míg ha közösen dolgoznak, akkor az erőfeszítés mindkét diák számára 2-2 pontba kerül. A bulizás nem jár erőfeszítési költséggel, de p pontnyi boldogságot okoz, ahol $p \in \mathbb{R}$. A diákok nem tudnak egymással kommunikálni, mielőtt eldöntenék, hogy a könyvtárba vagy bulizni menjenek-e. Írjuk fel a nyereségmátrixot és p minden lehetséges értékére döntsük el, hogy mik a Pareto-optimális stratégiák.
7. Alkalmazzuk a szigorú iterált eliminálást az alábbi stratégiai játékban.

	bal	közép	jobb
fel	$(2,3)$	$(0,2)$	$(1,1)$
le	$(1,1)$	$(5,0)$	$(0,4)$

8. Mutassunk példát olyan stratégiai játékra, melynek a nyereségmátrixának minden eleme különböző, de a laza iterált eliminálás után akármelyik stratégia megmaradhat egyetlenként.
9. Mutassuk meg, hogy bármely A és B nyereségmátrixszal adott kétszemélyes stratégiai játék esetén megadható olyan C nyereségmátrixú stratégiai játék, amiből az A ill. a B nyereségmátrixú játékok bármelyike megkapható laza eliminálások iterálásával.
10. Tegyük fel, hogy a tószennyezési játékban a 3. gyár tudja a másik két gyárról, hogy azok egymástól függetlenül p valószínűséggel tisztítják a tó vizét. Határozzuk meg minden $p \in [0,1]$ értékre, hogy milyen döntéssel jár jobban a 3. gyár.