Stratégialopás, Erdős–Selfridge-tétel

Algoritmikus játékelmélet

2. gyakorlat

2024.

Bouton-tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}_+$ és tekintsük azt a k-nim játékot, amiben a kupacok méretei $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Ekkor a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 0$.

Kombinatorikus játékok izomorfiája. A (G, N_W, N_T, N_L, v_0) és $(G', N'_W, N'_T, N'_L, v'_0)$ kombinatorikus játékokat izomorfaknak nevezzük, ha létezik olyan gráfizomorfizmus G és G' között, melyben az N_W és N'_W halmazok, valamint az N_T és N'_T halmazok, továbbá az N_L és N'_L halmazok, illetve v_0 és v'_0 csúcsok is egymásnak felelnek meg.

Hex. Adott egy $(n \times n)$-es hatszögrács, ahol $n \in \mathbb{N}_+$, és a soron következő játékos kiválasztja ennek egy (korábban még egyik játékos által sem választott) mezejét. A kezdőjátékos akkor nyer, ha keletkezik az általa kiválasztott mezőkből egy út a rács bal szélétől a jobbig, a másik játékos pedig akkor nyer, ha keletkezik az általa kiválasztott mezőkből egy út a rács felső szélétől az alsóig.

Hex tétel (Hein, Nash, Gale). A hex játék sohasem végződhet döntetlennel.

Építő–építő játék. Adott egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf, és a soron következő játékos kiválaszt egy (korábban még egyik játékos által sem választott) V-beli csúcsot. Az nyer, aki előbb kiválasztja valamely $\mathcal{E}$-beli hiperél minden csúcsát.

Építő–romboló, valamint romboló–építő játék. Adott egy $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf, és a soron következő játékos kiválaszt egy (korábban még egyik játékos által sem választott) V-beli csúcsot. Az építő játékos akkor nyer, ha kiválasztja valamely $\mathcal{E}$-beli hiperél minden csúcsát, a romboló játékos pedig akkor nyer, ha ezt meg tudja akadályozni. Ha a kezdőjátékos az építő, akkor építő–romboló, ellenkező esetben pedig romboló–építő játékról beszélünk.

Erdős–Selfridge-tétel. Ha egy építő–romboló játék $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfjára $\sum_{E \in \mathcal{E}} 2^{-|E|} < 1/2$ teljesül, akkor a romboló játékosnak mindig van nyerő stratégiája.

1. Adott egy $n \in \mathbb{N}_+$ szám. A soron következő játékos kiválasztja n egy olyan osztóját, melynek az osztója korábban még nem lett kiválasztva. Az veszít, aki az 1-et mondja. Bizonyítsuk be, hogy a kezdőjátékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $n > 1$.
2. Mely $n \in \mathbb{N}_+$ számok esetén lesz az 1. feladatban leírt, úgynevezett osztójáték izomorf egy mérgezett csoki játékkal?
3. Bizonyítsuk be, hogy a J_1 és J_2 éles kombinatorikus játékok pontosan akkor ekvivalensek, ha tetszőleges H éles kombinatorikus játék esetén $J_1 + H$ és $J_2 + H$ azonos típusúak.
4. (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}_+$ esetén ha k-nimben hozzáveszünk a meglévő kupacokhoz két további, egyforma méretű kupacot, akkor a játék lényegében nem változik, azaz ugyananannak a játékosnak lesz nyerő stratégiája, mint korábban.

   (b) Adott $n \in \mathbb{N}_+$ pénzérme egymás mellett egy sorban, mindegyik vagy fejjel, vagy írással felfelé. A soron következő játékos átfordít egy tetszőleges fejet írásra, valamint egy ettől jobbra lévő tetszőleges érmét átfordíthat az ellenkezőjére (ha akar). Az veszít, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfelé). Kinek van nyerő stratégiája?

5. Adott $n \in \mathbb{N}_+$ pénzérme egymás mellett egy sorban, mindegyik vagy fejjel, vagy írással felfelé. A soron következő játékos választ egy fejet, és azt, illetve az összes tőle jobbra lévő érmét átfordít az ellenkezőjére. Az veszít, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfelé). Kinek van nyerő stratégiája?

6. Tekintsük azt az általánosított építő–építő játékot, melyben ugyanazon a V csúcshalmazon adottak a $\mathcal{H}_1 = (V, \mathcal{E}_1)$ és $\mathcal{H}_2 = (V, \mathcal{E}_2)$ hipergráfok, és a kezdőjátékos a $\mathcal{H}_1$, a másik játékos pedig a $\mathcal{H}_2$ valamely hiperélét akarja megépíteni. Mutassuk meg, hogy ha $\sum_{E \in \mathcal{E}_1} 2^{-|E|} < 1/2$ és $\sum_{E \in \mathcal{E}_2} 2^{-|E|} < 1/2$ teljesül, akkor mindkét játékosnak van nemvesztő stratégiája.

7. (a) Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf és M a V-beli csúcsokon egy teljes párosítás úgy, hogy minden $\mathcal{E}$-beli hiperél tartalmaz legalább egy M-beli párosításélt. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az építő–építő, építő–romboló, illetve a romboló–építő játékokban az építő játékos(ok)nak nincs nyerő stratégiája.

   (b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$ esetén egy $(n \times n)$-es táblán játszott „vízszintes–függőleges” amőbában (tehát ahol az a játékos nyer, aki először gyűjt össze 5 egymás melletti jelet függőlegesen vagy vízszintesen) semelyik játékosnak nincs nyerő stratégiája.

8. Mutassuk meg, hogy ha egy romboló–építő játék $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfjára $\sum_{E \in \mathcal{E}} 2^{-|E|} < 1$ teljesül, akkor a romboló játékosnak mindig van nyerő stratégiája.

9. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \geq 2$ a hex játékot egy $(n \times n)$-es négyzetrácson játszva mindkét játékosnak van nemvesztő stratégiája.