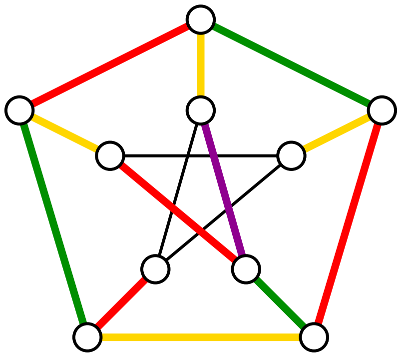
A számítástudomány alapjai segédanyag BME villamosmérnököknek a 2024/25-ös tanév 1. félévéhez

Fleiner Tamás

2024. december 26.



Bevezetés

Jelen elektronikus segédanyagot a 2024/25-ös tanév 1. félévében oktatott, villamosmérnököknek szóló, „A számítástudomány alapjai” kurzuson levetített diasorok alapján állítottam össze a szóbeli vizsgára történő felkészülés megkönnyítése érdekében. Előadóként úgy éreztem, hogy bár hasznosak a kurzus honlapjáról elérhető előadásvideók és diasorok, hatékonyabbá teszi tanulást, ha hagyományos jegyzetként, telefonról kényelmesen nézegető formátumban is rendelkezésre áll a tananyag.

A fentiek egyúttal utalnak a jelen segédlet hátrányaira is. Az órán vetített diasorok szóbeli magyarázatot igényeltek. Ez persze a videón elérhető, de ebben a jegyzetben időnként hiányozhat. Ha a vizsgára készülő szorgos hallgató valahol nem tudja követni a gondolatmenetet, érdemes lehet tehát a videón a megfelelő helyre tekernie, és meghallgatni az esetlegesen hiányzó indoklást. Egy digitális jegyzet keretei ugyancsak nem alkalmasak olyasfajta minimálanimációk bemutatására, amit a diasoron (például egy-egy gráfalgoritmus futtatása kapcsán) bemutattam. Ilyen esetekben isa felkészülés hasznos kiegészítője a diasor és a videó. További hátrány, hogy kereszthivatkozások sincsenek, és a segédanyag örökölte a diasor színpompáját, ami miatt a jelen jegyzet kinyomtatása fekete-fehérben nem szerencsés, színesben pedig drága és pazarló.

Az előadáson szerepeltek extra anyagrészek szürke háttérrel, ezek a jelen segédanyagban apró betűvel vannak szedve. Ezekből a világon semmit nem kérünk számon a vizsgán, de abban reménykedek, hogy érdeklődő hallgatók számára hasznos lehet az ezen részekben ismertetett kitekintés. Aki persze IMSC pontot is szeretne gyűjteni, az biztosan nem jár rosszul azzal, ha a törzsanyag elsajátítása **mellett** az extrákkal (vagy azok egy részével) is megismerkedik.

Mit is kell tudni a vizsgán és hogyan is zajlik a szóbeli?

Ahogy más vizsgákra, úgy SzA-ra is a neptunban kell jelentkezni, és csak az jöhet vizsgázni, aki a vizsga előtti napon a 12:00-kori állapot szerint a vizsgalapon szerepel, azaz korábban jelentkezett az adott vizsgára, és befér létszámkeretbe. (Túljelentkezés esetén időnként várólistát hozunk létre, és a jelentkezők ide kerülnek, majd a lejelentkezések függvényében előresorolódnak. Aki várólistán marad a jelentkezési időszak lezárásakor, az nem jöhet vizsgázni.)

A vizsgát általában egy nagyobb előadóban tartjuk, ahol a felkészülés történik. A vizsga szervezőjének hívására adott számú hallgató kezdheti meg a felkészülést. Ehhez a tanári asztalnál kell jelentkezniük fényképes igazolvány, toll és üres lapok birtokában, majd követni az utasításokat. Nevezetesen, részt venni a kidolgozandó tétel kisorsolásában, majd a **kijelölt** helyen helyet foglalni és megkezdeni a felkészülést, amire legalább 40 percet biztosítunk. Ezt követően megkezdődik a szóbeli vizsga, amit legfeljebb 60 ponttal értékelünk. 24 pont alatt a szóbeli rész és a vizsgajegy is elégtelen. Egyébként a szerzett pontszám 50 feletti részét IMSC pontként írjuk jóvá, az 50 alatti részt pedig 1,2-vel megszorozzuk, és ez lesz a szóbeli pontszáma. Ehhez adjuk hozzá a ZH-ról hozott pontszámot, és az így kapott összeg határozza meg a vizsgajegyet.

A szóbelin a 24 pontos teljesítményt az anyag megértése, a definíciók ismerete és a tételek alkalmazásának képessége jelenti. Bizonyítást tehát egyáltalán nem kell tudni reprodulálni a szóbelin a minimumkövetelmény eléréséhez. Minél inkább tisztában van a hallgató a bizonyításokkal és további összefüggésekkel, annál magasabb lesz a pontszáma, de 50 pontért sem kell tudni minden bizonyítást pontosan: ha valaki elakad, a vizsgáztató segít. A skála másik végének elérésére már jóval többféle lehetőség kínálkozik. Elegendő ehhez annak kiderülnie, hogy egy vastag betűsen szedett dolgot nem ismer (vagy rosszul tud) a hallgató, és még segítő kérdések nyomán sem kerül képbe az adott fogalom vagy tétel kapcsán. A nem vastag betűs részekből egy-két hiányosság még elfogadható, de ennél több szintén hasonló végeredménnyel jár. Ha pedig szinte minden fogalom, tétel kimondásához, értelmezéséhez segítő kérdések sorozata szükséges, az szintén kevés az erdeményes vizsgához. Számítani kell arra is, hogy a sorsolt tételen túl szúrópróbaszerűen a többi tételbe is belekérdezünk, a ZH által le nem fedett anyagrészre különösen odafigyelve. Szertném hangsúlyozni azonban, hogy a vizsgáztató célja nem a vizsgázó zavarba hozása, hanem a tudásának felmérése. Aki izgulós, annak fokozottan érdemes arra törekednie, hogy biztos legyen a tudása, merje jelezni, ha valamit nem ért, és elfogadja, hogy ennek hatására a vizsgáztató segíteni próbál a remélhetőleg meglévő tudás előcsalogatásában. Végül: nem győzzük hangsúlyozni, hogy a vizsgán egyáltalán nem kell alkalmi viseletben megjelenni. A vizsgázónak a jó ízlés keretein belül maradó öltözködési szokásai semmiben sem befolyásolják a vizsga kimenetelét.

Visszatérve a jelen segédanyagra: szinte biztos vagyok benne, hogy hemzseg a hibáktól és ügyetlenségektől. Annak érdekében, hogy ez idővel megváltozzon, tisztelettel felkérem az jegyzet használóit, hogy jelezzék a tapasztalataikat a `https://forms.gle/gQW9egKebAx2yaGc9` link mögött található űrlap (akár többszöri) kitöltésével. Az építő kritikát ezúton is köszönöm, és igyekszem a jegyzetet ezek segítségével használhatóbbá tenni. Örülök minden olyan, a kurzussal kapcsolatos véleménynek, megjegyzésenek is, ami az OHV kereteibe nem fér bele.

Néhány szó végül a jegyzetben alkalmazott jelölésekről. A bizonyítások végét (ill. a jegyzetben nem bizonyított állításokat) olyan kiskocka jelzi, mint amilyen ennek a sornak a végén is áll. $\square$

A ✓ jelentése, hogy az adott részállítás innentől világos, bizonyítottnak tekintjük, a feladatot megoldottuk. A $\lightning$ az ellentmondás felbukkanását jelzi, innen látjuk például, hogy (indirekt bizonyítás esetén) a feltevésünk megdőlt. A $\sum$ (szumma) az összegzésre utal: $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ jelentése, hogy az f függvényt kiértékeljük az i futóindex $1, 2, \ldots, n$ értékeire, majd a kapott függvényértékeket összeadjuk. Ha egy H halmaz elemei szerint szeretnénk összegezni, akkor alkalmazhatjuk a $\sum_{h \in H} f(h)$ vagy a $\sum\{f(h) : h \in H\}$ jelölést. Végül ha összeadás helyett össze szeretnénk szorozni egy halmaz elemeit vagy egy futóindex szerint számított függvényértékeket, akkor a $\sum$ helyett a $\prod$ (produktum) jelölést használjuk ugyanilyen szintaktikával.

Mindenkinek sikeres felkészülést kívánok,

Budapest, 2024. december 24.

Fleiner Tamás

VISZAA07 tételsor a Számítástudomány alapjaihoz

a 2024/2025-ös tanév I. félévre

A **félkövéren** szedett dolgokat tudni kell ismertetni, kimondani, ill. definiálni. A vizsgán az anyag értő ismeretét kérjük számon, elégségesért nem kell bizonyítást tudni.

1. Gráfelméleti alapfogalmak: **csúcs, él, diagram, fokszám**. Egyszerű gráf, irányított gráf, , komplementer gráf, reguláris gráf, él/csúcstörlés, élhozzáadás, (feszítő/feszített) részgráf, izomorfia, élsorozat, séta, út, kör, **összefüggő gráf**, komponens, **kézfogás-lemma**.
2. **Élhozzáadási lemma**erdő, **fa**, fák egyszerűbb tulajdonságai: két levél, éltörlés és élhozzáadás hatása, erdők élszáma. **Feszítőfa** létezése, feszítőfához tartozó alapkörök és alap vágások.
3. **Minimális költségű feszítőfa**, mkffák jellemzése a c-feszítő tulajdonság segítségével , **Kruskal-algoritmus** helyessége.
4. Általános gráfbejárás: **a csúcsok állapotváltozása, a bejárás általános lépése**, a bejáráshoz tartozó sorrendek ill. az élek osztályozása bejárás után. A **BFS** és tulajdonságai, legrövidebb utak fájának létezése.
5. Gráfút hossza, gráfcsúcsok távolsága, triviális és pontos **(r, ℓ)-felső becslés**, **élmenti javítás**, pontos felső becslés jellemzése. **Dijkstra-algoritmus**, működése, helyessége és lépésszáma. Legrövidebb utak fája.
6. **Mélységi keresés** és alkalmazásai (fellépő éltípusok, mélységi- és befejezési számozásból az éltípus meghatározása, irányított kör létezésének eldöntése DFS-sel).
7. **DAG**, jellemzése, **topologikus sorrend** keresése. Leghosszabb utak keresése, **PERT-módszer**, kritikus utak és tevékenységek.
8. **Hamilton-kör és út** létezésére szükséges, ill. elégséges feltételek: komponensszám ponttörlés után (Petersen-gráf) **Dirac és Ore tételei**, gazdag párok, hízlalási lemma, Chvátal-lezárt.
9. **Gráfok síkba ill. gömbre rajzolhatósága, tartomány, sztereografikus projekció**, következményei. Duális kézfogáslemma, **(általánosított) Euler-féle poliédertétel**
10. **Euler-séta és körséta** létezésének szükséges és elégséges feltétele.

    Egyszerű, síkbarajzolható gráf esetén felső korlátok az élszámra és a minimális fokszámra. **Kuratowski gráfok** síkbarajzolhatósága, **Kuratowski-tétel** könnyű iránya.
11. **Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás** és kapcsolata a megoldásokkal. **LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrixból**. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. **Gauss-elimináció**.
12. Az $\mathbb{R}^n$ **tér**, vektorműveletek azonosságai, (generált) **altér** (példák), (triviális) **lineáris kombináció**, alterek metszete, **generátorrendszer**, **lineáris függetlenség** (kétféle definíció). Lin.ftn rendszer hízlalása, generátorrendszer ritkítása, kicserélési lemma, **FG-egyenlőtlenség** és következménye.
13. **Altér bázisának** fogalma, bázis létezése, $\mathbb{R}^n$ **standard bázisa**. Bázis konstrukciója homogén lineáris egyenletendszerrel megadott altér esetén.
14. Altér előállítása homogén lin.egyenletrendszer megoldásaiként generátorrendszerből. **Altér dimenziójának jóldefináltsága**, bázishoz tartozó **koordinátavektor fogalma és a koordinátavektor kiszámítása**.
15. **Permutáció és inverziószám**. **Bástyaelhelyezés** és permutáció kapcsolata, inverzióban álló bástyapárok. **Determináns**, kifejtési tag, **felső háromszögmátrix determinánsa**.
16. **Mátrix transzponáltja**, transzponált determinánsa, **ESÁ hatása a determinánsra**, determinánsszámítás felső háromszögmátrixra transzformálással, **előjeles aldetermináns, kifejtési tétel**.
17. Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. **Mátrixok összeadása és szorzásai**, e műveletek tulajdonságai, determinánsok szorzástétele. **A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.
18. **Mátrix jobb- és balinverze**, ezek viszonya. **Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal** és előjeles aldeterminánsokkal, **reguláris mátrixok** jellemzése determinánssal, sorokkal, oszkopokal ill. RLA mátrix segítségével.
19. **Sor- oszlop- és determinánsrang**, ezek viszonya és **kiszámítása**. Összeg és szorzat rangja.
20. **Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja**, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele $n \times n$ méretű együtthatómátrix esetén.

I. rész

A gráfelmélet alapjai

1. fejezet

Gráfelméleti alapfogalmak

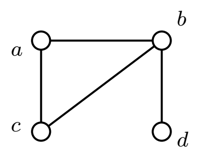
1.1 Mi a gráf?

Def: $G = (V, E)$ **egyszerű, irányítatlan gráf**, ha $V \neq \emptyset$ a G **csúcsainak** (vagy **(szög)pontjainak**) és $E \subseteq \binom{V}{2}$ a G G **éleinek** halmaza, ahol $\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ a V halmaz kételemű részhalmazainak halmaza.

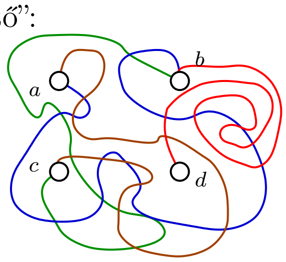
Példa: Tekintsük a $G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}\})$ gráfot. Épeszű ember persze nem így tekint a gráfokra.

Def: A $G = (V, E)$ gráf **diagramja** a G egy olyan lerajzolása, amiben V-nek a sík különböző pontjai felelnek meg, és G minden $\{u, v\}$ élének egy-egy u-t és v-t összekötő görbe felel meg.

Példa: Nézzük inkább a fenti példában szereplő G gráf egy diagramját:



Le lehet persze rajzolni G-t úgy is, hogy az mindjárt nem olyan „áttekinthető”:

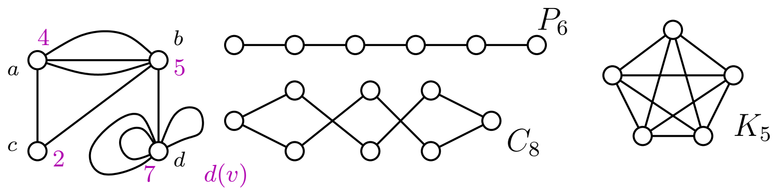


Példa: A **facebook-gráf** csúcsai a meta-felhasználók, élei pedig az facebook-ismeretségeknek felelnek meg.

Terminológia & konvenciók: Gráf alatt rendszerint egyszerű, irányítatlan gráfot értünk. Ha G egy gráf, akkor $V(G)$ a G csúcshalmazát, $E(G)$ pedig G élhalmazát jelöli, azaz $G = (V(G), E(G))$. Az $e = \{u, v\}$ élt röviden uv-vel jelöljük. Ekkor e az u és v csúcsokat **köti össze**. Továbbá u és v az e **végpontjai**, amelyek az e élre **illeszkednek**, és e mentén **szomszédosak**.

1.2 Multigráfok és irányított gráfok

Megj: Ha egy gráf nem egyszerű, akkor lehetnek **párhuzamos élei**, **hurokélei** vagy akár párhuzamos hurokélei is.



1.1. ábra.

Def: Az **irányított gráf** olyan gráf, aminek minden éle irányított.

Def: $G = (V, E)$ **véges gráf**, ha V és E is véges halmazok.

Megf: Egyik halmaz végességéből sem következik a másiké.

Megj: A végtelen gráfoknak rendkívül különös tulajdonságai lehetnek. Ezen a kurzuson csak véges gráfokkal foglalkozunk.

Def: Az **n-pontú út**, **n-pontú kör**, ill. **n-pontú teljes gráf** jele rendre P_n, C_n ill. K_n. (P_1, C_1, C_2 elfajulók.)

Megf: $K_1 = P_1$, $K_2 = P_2$, $K_3 = C_3$

Def: $v \in V(G)$ esetén a v-re illeszkedő élek száma a v **fokszáma**. Jelölése $d_G(v)$ vagy $d(v)$. Fontos, hogy a hurokél kétszer számít a fokszám meghatározásakor.

Példa: A facebook-gráfban $d(v)$ a v ismerőseinek számát jelenti. (Irányított gráf esetén $\delta(v)$ ill. $\rho(v)$ a v **ki-** ill. **befokát** jelöli.)

Def: A G gráf maximális ill. minimális fokszáma $\Delta(G)$ ill. $\delta(G)$.
A G gráf **reguláris**, ha minden fokszáma ugyanannyi: $\Delta(G) = \delta(G)$,
G pedig **k-reguláris**, ha minden csúcsának pontosan k a fokszáma.

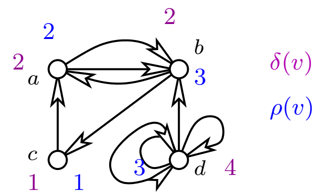
Megf: Minden kör 2-reguláris, a K_n pedig $(n-1)$-reguláris.

1.3 A kézfogás-lemma

Kézfogás-lemma (KFL): Ha $G = (V, E)$ véges (nem feltétlenül egyszerű) gráf, akkor $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, azaz a csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese.

Megj: Az 1.1 ábrán ellenőrizhető a kézfogás-lemma. Figyeljük meg, hogy a lemma nem csak egyszerű gráfra igaz.

Általánosított kézfogás-lemma: Tetsz. $G = (V, E)$ véges irányított gráfra $\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \rho(v) = |E|$, azaz a csúcsok ki- és befokainak összege is az élszámot adja meg.

Példa: A kifokok összege itt is egyenlő a befokokéval: 

Biz: Az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámolva G minden irányított élét pontosan egyszer vesszük figyelembe, így a kifokok összege az élszám. A belépő élekre hasonló igaz, ezért a befokok összege is az élszám. □

Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna az általánosított kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. A 0-élű (**üres**)gráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 1-gyel növeli az élszámot is és a ki/befokok összegét is.

A KFL bizonyítása: Készítsük el a G' digráfot úgy, hogy G minden élét egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítjük. Ekkor

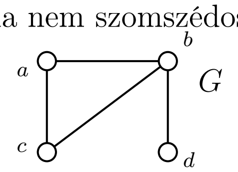
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} \delta_{G'}(v) = |E(G')| = 2|E(G)| \qquad \square$$

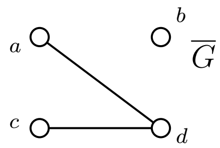
Megj: Úgy is bizonyíthattuk volna a kézfogás-lemmát, hogy egyenként húzzuk be G-be az éleket. Üresgráfokra a lemma triviális, és minden egyes él behúzása pontosan 2-vel növeli a kétszeres élszámot és a csúcsok fokszám-összeget is.

1.4 Komplementer és izomorfia

Def: A G **egyszerű** gráf **komplementere** $\overline{G} = (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$.

Megj: G és $\overline{G}$ csúcsai megegyeznek, és két csúcs pontosan akkor szomszédos $\overline{G}$-ben, ha nem szomszédosak G-ben.

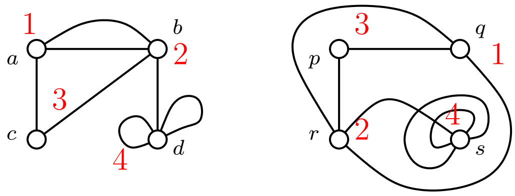
Példa: 



Megf: Ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és $|V(G)| = n$, akkor $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v) = n - 1$ teljesül G bármely v csúcsára.

Biz: A K_n teljes gráf minden éle a G és $\overline{G}$ gráfok közül pontosan az egyikhez tartozik. Ezért $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)$ megegyezik a v csúcs K_n-beli fokszámával, azaz $n - 1$-gyel. $\square$

Def: A G és G' gráfok akkor **izomorfak**, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatók meg az 1-től n-ig terjedő egész számokkal (alkalmas n esetén), hogy G bármely két u, v csúcsa között pontosan annyi él fut G-ben, mint az u-nak és v-nek megfelelő sorszámú csúcsok között G'-ben. Jelölése: $G \cong G'$.

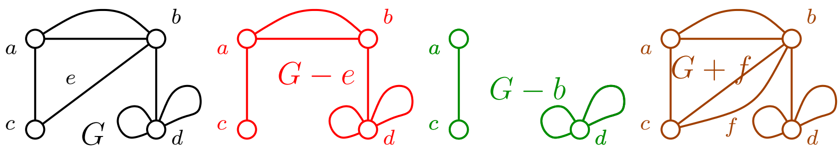


Példa:

Megf: Ha $G \cong G'$, akkor G és G' lényegében ugyanúgy néznek ki. Így például minden fokszám ugyanannyiszor lép fel G-ben mint G'-ben, ugyanannyi C_{42} kör található G-ben, mint G'-ben, stb.

1.5 Gráfoperációk

Def: **Éltörlés**, csúcstörlés, élhozzáadás:

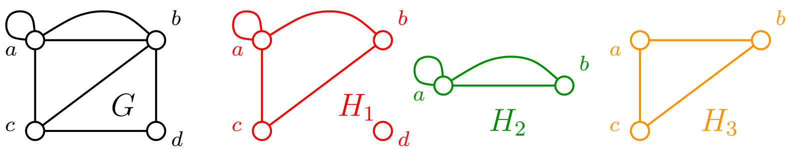


Def: **Feszítő részgráf:** éltörlésekkel kapható gráf.

Feszített részgráf: csúcstörlésekkel kapható gráf.

Részgráf: él- és csúcstörlésekkel kapható gráf.

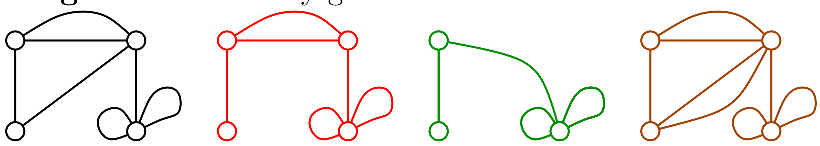
Példa: $\mathbf{H_1}$, H_2, H_3 a G **feszítő**, feszített és jelzőnélküli részgráfjai.



Megf: H a G részgráfja $\iff$ $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.
H a G feszítő részgráfja $\iff$ $V(H) = V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$.
H a G feszített részgráfja $\iff$ $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H)$ a H csúcsai közt futó G-beli élekből áll.

1.6 Háromféle elérhetőség, összefüggőség

Furfangos kérdés: Hány gráf látható az alábbi ábrán?



A matematikus válasza: Természetesen egy.

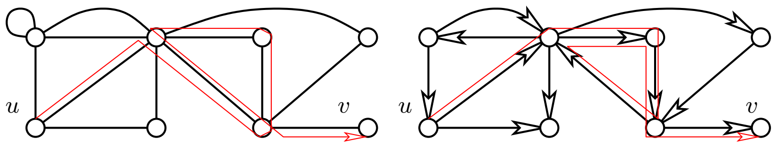
(Miért is ne lehetnének egy gráf csúcsai és élei többféle színűek?)

Megj: A gráf definíciója megengedi, hogy a gráf egyik részéből egyáltalán ne vezessen él a gráf maradék részébe, azaz a gráf egyik csúcsából ne lehessen éleken keresztül eljutni a gráf egy másik csúcsába. Ez történik pl az üresgráf (alias $\overline{K_n}$) esetén.

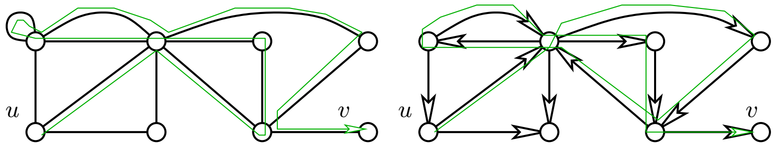
A továbbiakban a gráf csúcsainak „elérhetőségi struktúráját" vizsgáljuk.

Def: Legyen $G = (V, E)$ (irányított vagy irányítatlan) gráf.

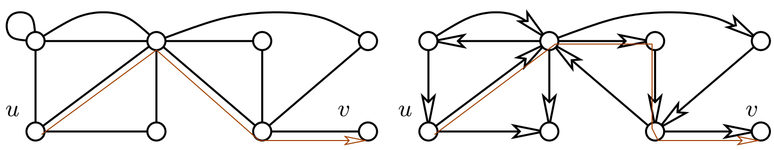
Élsorozat: $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$, ahol $e_i = v_i v_{i+1} \forall i$. (Tkp egyik csúcsból eljutunk egy másik csúcsba mindig élek mentén haladva.)



Séta: olyan élsorozat, amelyikben nincs ismétlődő él.



Út: olyan séta, amelyikben nincs ismétlődő csúcs.



Terminológia: Ha a kezdőpont u, a végpont v, akkor **uv-élsorozatról**, **uv-sétáról**, ill. **uv-útról** beszélünk. Ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy $u = v$, de a kezdő (és vég)pontot nem akarjuk megnevezni, akkor **zárt élsorozatról**, **körsétáról** ill. **körről** beszélünk.

Megf: Tetsz. G-re igaz: $\exists uv$-út $\Rightarrow$ $\exists uv$-séta $\Rightarrow \exists uv$-élsorozat. □

Állítás: Tetsz. G-ben igaz: $\exists uv$-élsorozat $\Rightarrow$ G-ben $\exists uv$-út. □

Def: G ir.tatlan gráf. u-ból v **elérhető** ($u \sim v$), ha $\exists$ uv-út G-ben.

Def: A G irányítatlan gráf **összefüggő**, ha $u \sim v$ $\forall u, v \in V(G)$.

Megj: (1) Az összefüggőség szokásos definíciója nem a $\sim$ reláció segítségével történik, hanem valahogy így:

a G irányítatlan gráfot akkor mondjuk összefüggőnek, ha G bármely két csúcsa között vezet G-beli út.

(2) Az előző definíció irányított gráfokra is kiterjeszthető:
a G irányított gráfot akkor mondjuk **erősen összefüggő**nek, ha G bármely $u, v \in V(G)$ esetén van **irányított** uv-út G-ben.

(3) Irányított gráf másfajta összefüggősége is értelmezhető: a G irányított gráfot akkor mondjuk **gyengén összefüggő**nek, ha a G-nek megfelelő irányítatlan gráf összefüggő.

A következő célunk a gráfkomponens definíciója.

Először matematikailag precízen mutatjuk.

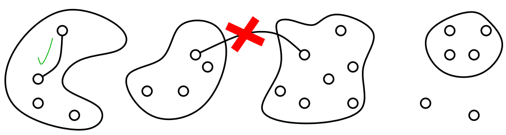
Köv: Ha G irányítatlan gráf, akkor $\sim$ ekvivalenciareláció: (1) $\forall u \in V(G): \; u \sim u$, (2) $\forall u, v \in V(G): \; u \sim v \Rightarrow v \sim u$, és (3) $\forall u, v, w \in V(G): \; u \sim v \sim w \Rightarrow u \sim w$. $\square$

Arról van szó, hogy minden csúcs elérhető önmagából, ha v elérhető u-ból, akkor u is v-ből (ez pl. irányított gráfokra már nem feltétlenül teljesül), végül pedig ha u-ból v, v-ből pedig w elérhető, akkor w elérhető u-ból is. Az itt felsorolt reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságok az ún. ekvivalenciarelációkat definiálják. Könnyen látható, hogy ha egy relációra teljesül e három tulajdonság, akkor az alaphalmaz feldarabolható diszjunkt részekre (ún. ekvivalenciaosztályokra) úgy, hogy az alaphalmaznak két eleme pontosan akkor áll relációban egymással, ha ugyanabba az ekvivalenciaosztályba esnek.

Def: A G gráf **(összefüggő) komponense** a $\sim$ ekvivalenciaosztálya.

Mi más utat követünk.

Def: $K \subseteq V(G)$ pontosan akkor **komponense** G-nek, ha K-ból nem lép ki éle G-nek, de $\forall v, v' \in K$ esetén $v \sim v'$.



Megj: A fenti **Def** ekvivalens a korábban említett precíz (és absztrakt) definícióval. Mi a szemléletessége miatt ezt az utóbbit használjuk, jóllehet matematikai szempontból ügyetlenebb.

Def: Az egyelemű komponens neve **izolált pont**.

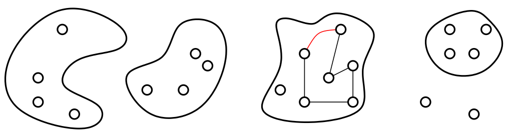
Megf: G pontosan akkor összefüggő, ha egy komponense van. $\square$

Lemma: Minden G irányítatlan gráf csúcshalmaza egyértelműen bomlik fel G komponenseinek diszjunkt uniójára. $\square$

Megj: A G komponense alatt sokszor nem csupán a G csúcsainak egy K részhalmazát, hanem a K által feszített részgráfot is értjük.

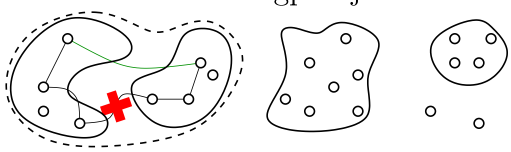
Kínzó kérdés: Mi történik, ha G-be behúzunk egy $e = uv$ élt?

I. eset: Az e él végpontjai G ugyanazon komponensbe esnek.



Ekkor a komponensek nem változnak meg, de mivel vezet u és v közötttt út G-ben, ezért legalább egy új kör keletkezik.

II. eset: Az e él végpontjai G különböző komponenseiben vannak.



Ekkor nem vezet u és v között út G-ben, ezért nem keletkezik új kör, azonban u és v komponensei egy új komponenssé olvadnak össze.

A fenti megállapításokat fogalalja össze az alábbi eredmény.

Élhozzáadási lemma (ÉlHaL): Legyen G irányítatlan gráf és $G' = G + e$. Ekkor az alábbi két esetből pontosan egy valósul meg.

(1) G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van, mint G-nek. (A keletkező kör elfajuló is lehet.)

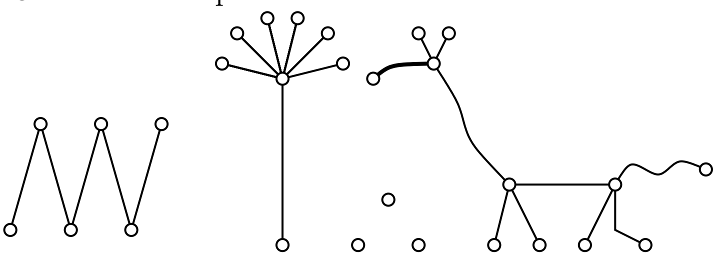
(2) G és G' körei megegyeznek, de G'-nek eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek. □

1.7 Fák és erdők

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdőnek** nevezzük.
Az összefüggő, körmentes irányítatlan gráf neve **fa**.

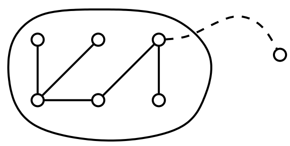
Megf: G erdő $\iff$ G minden komponense fa

Példa: Itt egy erdő.



Megf: (1) P_n fa minden $n \geq 1$ egész esetén.

(2) Fához egy új csúcsot egy éllel bekötve fát kapunk:



Lemma: G n-csúcsú, k-komponensű erdő$\Rightarrow |E(G)| = n - k$.

Biz: Építsük fel G-t a $\overline{K_n}$ üresgráfból az élek egyenkénti behúzásával. G körmentes, ezért az ÉlHaL miatt minden él zöld: behúzásakor 1-gyel csökken a kompnensek száma. A $\overline{K_n}$ üresgráfnak n kompnense van, G-nek pedig k. Ezért pontosan $n - k$ zöld élt kellett behúzni G felépítéséhez. □

Köv: Ha F egy n-csúcsú fa, akkor élszáma $|E(F)| = n - 1$.

Biz: F egy 1-komponensű erdő, így az előző Lemma alkalmazható $k = 1$ helyettesítéssel. □

Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely kettőből következik a harmadik.
(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.

Biz: (a)+(b)⇒ (c): ✓ (Az imént láttuk.)

(a)+(c)⇒ (b): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. $n-1$ él egyikének behúzása se hoz létre kört, ezért az ÉlHaL miatt minden él zöld, és 1-gyel csökkenti a komponensszámot. Végül $n-(n-1)=1$ komponens marad, tehát G öf.

(b)+(c)⇒ (a): Építsük fel G-t élek egyenkénti behúzásával. Mivel a komponensek száma végül 1 lesz, ezért $n-1$ zöld élt kellett behúzni. (c) miatt G összes éle zöld, piros éle nincs. Az ÉlHaL miatt G körmentes. □

1.8 Fák további tulajdonságai

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor
(1) $(F-e)$-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F-nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) $(F+e)$-nek pontosan egy köre van $\forall e \notin E(F)$-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F-nek legalább két levele van.

Def: A G irányítatlan gráf v csúcsa **levél**, ha $d(v) = 1$.

Biz: (1): $F-e$ erdő, hisz körmentes. $F = (F-e)+e$, és mivel F is körmentes, e zöld az ÉlHaL miatt. Ezért F-nek 1-gyel kevesebb komponense van, mint $(F-e)$-nek. Mivel F-nek 1 komponense van, $(F-e)$-nek 2. □

(2): F öf, ezért van (legalább egy) uv-útja, mondjuk P. Ezen P út bármely e élét elhagyva, a kapott $F-e$ gráfnak (1) miatt két komponense van, melyek közül az egyik u-t, a másik v-t tartalmazza. Ezért $(F-e)$-ben nincs uv-út. Azt kaptuk, hogy P minden éle benne van F minden uv-útjában, ezért F-ben P-n kívül nincs más uv-út. □

(3): Tfh $e = uv$. Mivel F körmentes, ezért $F+e$ minden köre e-ből és F egy uv-útjából tevődik össze. Ezért $F+e$ köreinek száma megegyezik az F fa uv-útjainak számával, ami (2) miatt pontosan 1. □

(4): (Algebrai út) A KFL miatt $\sum_{v \in V(G)}(d(v)-2) = \sum_{v \in V(G)} d(v) - 2n = 2(n-1) - 2n = -2$. F minden v csúcsára $d(v) \geq 1$ teljesül, ezért $d(v) - 2 \geq -1$. A fenti összeg csak úgy lehet -2, ha F-nek legalább 2 levele van. □

(4): (Kombinatorikus út) Induljunk el F egy tetsz. v csúcsából egy sétán, és haladjunk, amíg tudunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el. □

Mit tanultunk a gráfokról?

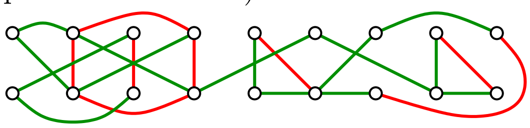
- Egyszerű, irányított, irányítatlan és multigráfok, fokszámok
- Kézfogás-lemma
- Gráf komplementere, izomorfia, részgráffogalmak
- Élsorozat, séta, út, összefüggőség
- Élhozzáadási lemma
- Fák és erdők
- Fák tulajdonságai

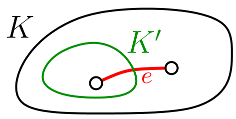
2. fejezet

Minimális költségű feszítőfák

2.1 Feszítőfák

Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉlHaL szerinti kiszínezésével! (A kompenensszámot csökkentő élt zöldre, a kört létrehozó élt pirosra színezzük.)





Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!

G' biztosan körmentes lesz, hiszen a zöld élek sosem alkottak kört a korábbi élekkel.

G' minden K' komponense részhalmaza G egy K komponensének. Ha $K' \neq K$, akkor G-nek van olyan éle, ami kilép K'-ből. Ezen élek mind pirosak K' definíciója miatt. Legyen e ezek közül az elsőnek kiszínezett. Az e él nem tudott kört alkotni a korábban kiszínezettekkel, így nem lehet piros: ellentmondás. Ezek szerint G és G' komponensei megegyeznek.

Köv: A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel. $\square$

Def: F a G gráf **feszítőfája** (**ffája**), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.

Állítás: (G-nek van feszítőfája) $\Longleftrightarrow$ (G öf.)

Biz: $\Rightarrow$: Legyen F a G ffája. F öf, és $V(F) = V(G)$, tehát G bármely két csúcsa között vezet F-beli út.

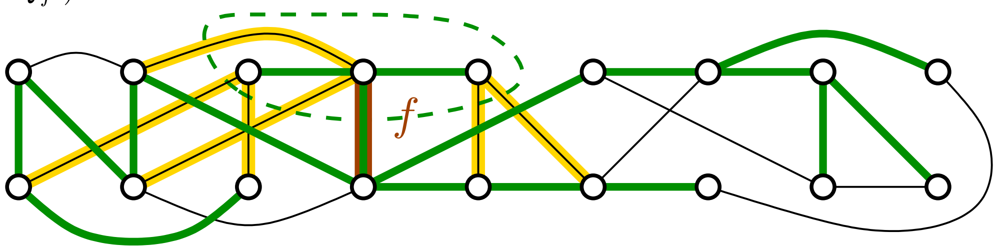
$\Leftarrow$: Építsük fel G-t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen kompnense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható. $\square$

Megj: Ha egy nem feltétlenül összefüggő G gráf éleit a fenti módon kiszínezzük, akkor a zöld élek G minden komponensének egy F feszítőfáját alkotják. Nem összefüggő G esetén a zöld élek alkotta feszítő részgráf neve a G **feszítő erdeje**.

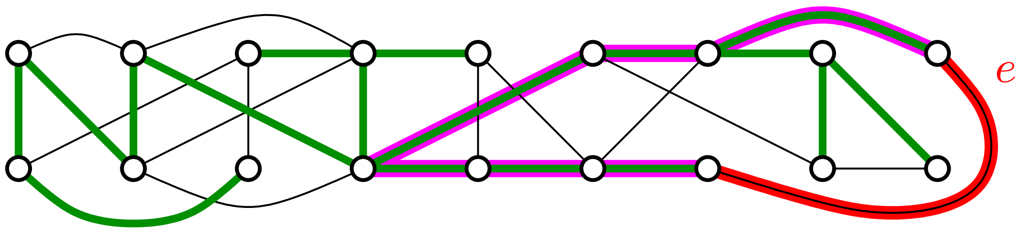
2.2 Alapkörrendszer, alap vágás rendszer

Adott egy G gráf és G-nek egy F feszítőfája. Ekkor G minden e éléhez tartozik egy F által meghatározott, kitüntetett élhalmaz. Attól függően, hogy az e él F-beli-e, kétféle lehet ez az élhalmaz.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Q_f **alap vágást** G azon élei alkotják, amik az $F - f$ két komponense között futnak. (Speciálisan $f \in Q_f$.)



Az $e \in E(G) \setminus E(F)$ éléhez tartozó C_e **alapkör** az $F + e$ köre. (Speciálisan $e \in C_e$.)



Megf: Tfh $f \in F$ és $e \in E(G) \setminus E(F)$ Ekkor
$(f \in C_e) \iff (F - f + e \text{ ffa}) \iff (e \in Q_f)$.

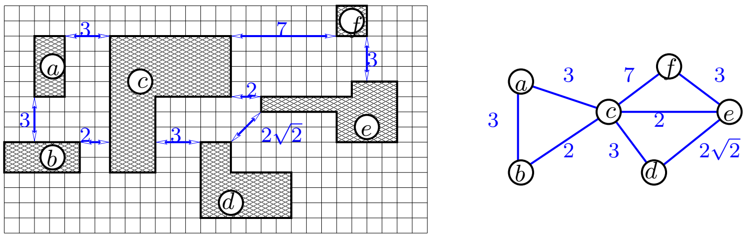
Köv: Az C_e alapkört e mellett azon F-beli élek alkotják, amelyek alap vágása e-t tartalmazza, azaz $C_e = \{e\} \cup \{f \in E(F) : e \in Q_f\}$.

A Q_f alap vágást f mellett G azon élei alkotják, melyek alapköre f-et tartalmazza, azaz $Q_f = \{f\} \cup \{e \in E(G) \setminus F(F) : f \in C_e\}$.

2.3 Egy gyakorlati probléma

A Guváti vállalat piripócsi üzemében álló fém konténereket kell leföldelni, azaz mindegyiket közvetlenül vagy közvetve összekötni az f földelési ponttal.

Nem törődünk a vonatkozó érintésvédelmi szabályokkal, így egy konténer egy másik, már földelt konténerhez is hozzácsatlakoztatható. Hogyan lehet ezt a feladatot a lehető legkevesebb földelővezeték felhasználásával úgy megoldani, hogy minden felhasznált vezetéknek egy konténert vagy egy másik konténerrel, vagy a földelési ponttal kell közvetlenül összekötnie?



A probléma megoldása érdekében az alábbi lépéseket követjük

1. Megállapítjuk, mennyi vezeték kell az értelmesen összeköthető konténerpárok ill. földpont konténerrel történő összekötésére.
2. Ezen összekötésekből kell néhányat kiválasztani úgy, hogy mindent leföldeljünk, de a legkisebb legyen a felírt számok összege.
3. G Gráfot készítünk, $V(G)$ = a konténerek + a földelési pont, $E(G)$ = az értelmes összeköttetések.
4. G-nek úgy kell kiválasztani néhány élét, hogy f-ből G minden más csúcsába el lehessen jutni a kiválasztott éleken, és emellett a kiválasztott élekre írt számok összege minimális legyen.
5. Ezért a kiválasztott éleknek körmentes öf gráfot kell alkotniuk.

A továbbiakban formalizáljuk a fenti feladatot.

2.4 Minimális költségű feszítőfa

Def: Adott a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élein a $k : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, azaz $k(e)$ az e él költségét jelenti. Tetsz. $F \subseteq E$ élhalmaz **költsége** az F-beli élek összköltsége: $\tilde{k}(F) = \sum_{f \in F} k(f)$.
Def: Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben **minimális költségű feszítőfa** (**mkffa**), ha
(1) (V, F) a G feszítőfája, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítőfájára.
Def: Az $F \subseteq E$ élhamaz G-ben **minimális költségű feszítő erdeje**, ha
(1) (V, F) a G feszítő erdeje, és
(2) $\tilde{k}(F) \leq \tilde{k}(F')$ teljesül a G bármely (V, F') feszítő erdejére.
Megf: A konténerföldelési probléma megoldása egy mkffa.

Cél: Hatékony eljárás mkffa keresésére.
Ötlet: Keressük a feszítőfát a tanult módon, az élek egyenkénti behúzásával, az ÉlHaL szerint zöldre színezett élek halmazaként.

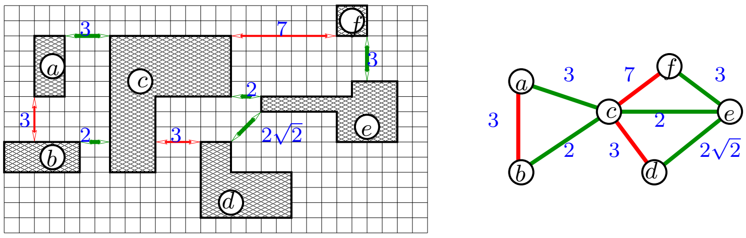
(Zöld él: olyan él, ami nem alkot kört a korábban felépített élekkel.)

Mohó stratégia: A feszítőfa építésekor költség szerint növekvő sorrendben döntsünk az élekről, hátha mkffát kapunk a végén.

Kruskal-algoritmus: Input: $G = (V, E)$ és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. Output: $F \subseteq E$

Működés: Tfh $k(e_1) \le k(e_2) \le \ldots \le k(e_m)$, ahol $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és $i = 1, 2, \ldots, m$-re

$$F_i := \begin{cases} F_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_{i-1} & \text{ha } F_{i-1} \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases} \quad F := F_m$$

Példa: 

Megj: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus feszítő erdőt talál. Sőt: ha G összefüggő, akkor a Kruskal outputja feszítőfa.
A kérdés az, hogy ez a rövidlátó, mohó stratégia vajon mindig optimális megoldást, azaz minimális költségű feszítőfát (ill. feszítő erdőt) talál-e.

2.5 A Kruskal-output egy fontos tulajdonsága

$G = (V, E)$ gráf és $k : E \to \mathbb{R}_+$ ktgfv. esetén legyen G_c a legfeljebb c költségű élek alkotta feszítő részgráfja G-nek: $G_c = (V, E_c)$, ahol $E_c := \{e \in E : k(e) \le c\}$.

Figyeljük meg, hogy ha a legfeljebb c költségű élekek feldolgozása után abbahagynánk a Kruskal-algoritmust, akkor az output a G_c gráf egy feszítő erdeje lenne.

Köv: Ha a G gráfon futtatott Kruskal-algoritmus outputja F, akkor $F \cap E_c$ a G_c egy feszítő erdeje minden $c > 0$ esetén.

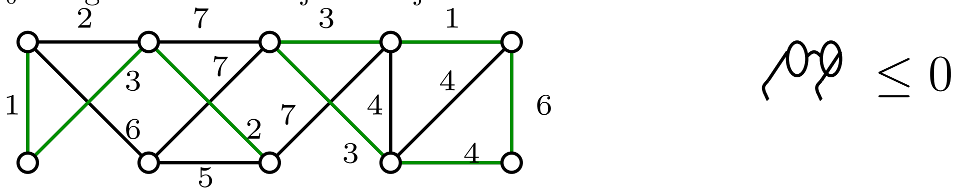
Ez egy rendkívül hasznos tulajdonság, érdemes neki nevet adni.

Def: A fenti, élköltségekkel ellátott G gráf éleinek egy F részhalmaza **c-feszítő** tulajdonságú, ha $F \cap E_c$ a G_c feszítő erdeje.

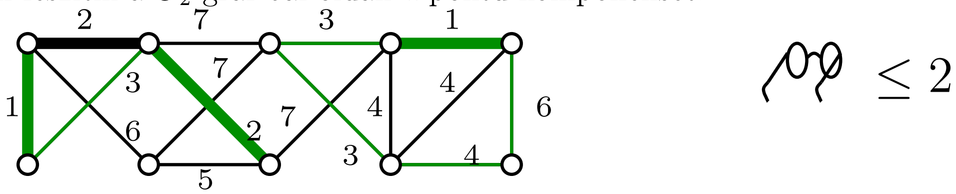
Megj: Ha a legfeljebb c költségű éleket olcsónak hívjuk, akkor a c-feszítő tulajdonság azt jelenti, hogy az olcsó élek gráfjában feszítő erdőt alkotnak az F-beli olcsó élek. (Ha olyan szemüvegben néznénk a gráfra, amivel csak az olcsó éleket látjuk, akkor az általunk látott G-nek egy feszítő erdejét alkotná az, amit F-ből látunk.)

Példa: Adott a fent látható G gráfban az F élhalmaz. Nézzünk rá a varázsszemüveggel!

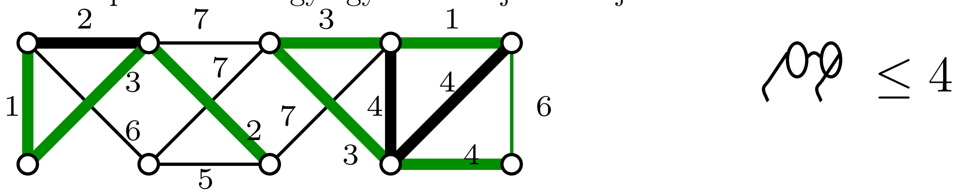
Az F élhalmaz 0-feszítő, mert az F-beli legfeljebb 0 költségű élek (0 db) a G_0 üresgráf feszítő redejét alkotják:



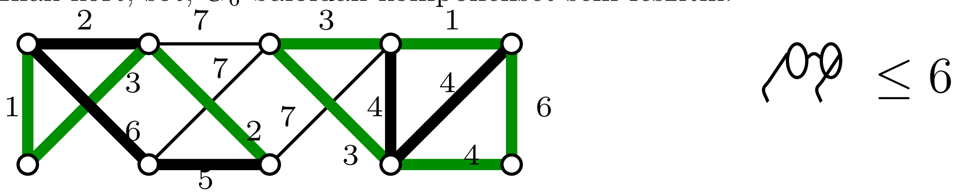
Az F élhalmaz nem 2-feszítő, mert az F-beli legfeljebb 2 költségű élek nem feszítik a G_2 gráf bal oldali 4-pontú komponensét:



Az F élhalmaz 4-feszítő, hisz F 4-nél nem drágább élei a G_4 gráf mindhárom komponensének egy-egy feszítőfáját alkotják:



Az F élhalmaz nem 6-feszítő, u.i. a 6-nál nem drágább F-beli élek tartalmaznak kört, sőt, G_6 baloldali komponensét sem feszítik:



Megj: Azt láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus F outputja c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ esetén.

2.6 Mkffák struktúrája

Azt fogjuk igazolni, hogy ez a fent látott c-feszítő tulajdonság karakterizálja a mkffákat, azaz nem csupán minden mkffa rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, de minden ilyen tulajdonságú élhalmaz egyúttal mkffa is.

Lemma: Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ gráf, $k : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív költségfüggvény a G élein, és az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_\ell\} \subseteq E$ élhalmaz c-feszítő tulajdonságú minden nemnegatív c-re, továbbá $k(f_1) \le k(f_2) \le \dots \le k(f_\ell)$. Tegyük fel továbbá, hogy $F' = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell\}$ a G egy feszítő erdejének élei, és $k(f'_1) \le k(f'_2) \le \dots \le k(f'_\ell)$. Ekkor $k(f_i) \le k(f'_i)$ teljesül $\forall\ 1 \le i \le \ell$ esetén, így $\tilde{k}(F) \le \tilde{k}(F')$.

Megj: A fenti Lemmában szereplő F szükségképpen a G feszítő erdeje, hisz ha c minden fellépő élköltségnél nagyobb, akkor $E_c = E$ és $G_c = G$. Így $F \cap E_c = F \cap E = F$ a $G_c = G$ feszítő erdeje.

Biz: Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $k(f_i) > k(f'_i)$ teljesül valamelyik i-re. Az a célunk, hogy ebből a feltevésből ellentmondást vezessünk le. Legyen $c := k(f'_i)$.

Ekkor $k(f_i) > c$, ezért $f_i, f_{i+1}, \dots \notin E_c \cap F$ ezért $|E_c \cap F| < i$. Az F c-feszítő tulajdonsága miatt $E_c \cap F$ a G_c egy olyan feszítő erdeje, ami i-nél kevesebb élt tartalmaz. Az $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$ élek is mind E_c-beliek, és többen vannak az $E_c \cap F$ feszítő erdő élszámánál. Tehát $f'_1, f'_2, \dots, f'_i$ nem körmentes, így $f'_1, f'_2, \dots, f'_\ell$ sem az. Az indirekt feltevés ellentmondásra vezetett. Ez azt jelenti, $k(f_i) \le k(f'_i)$ teljesül $\forall i = 1, 2, \dots$ esetén.

Ezért $\tilde{k}(F) = \sum_{i=1}^{\ell} k(f_i) \le \sum_{i=1}^{\ell} k(f'_i) = \tilde{k}(F')$ teljesül a két feszítőfa költségére. $\square$

Köv: A Kruskal-algoritmus outputja a G gráf egy minimális költségű feszítő erdeje.

Biz: Láttuk, hogy ha F a Kruskal-algoritmus outputja, akkor F c-feszítő tulajdonságú minden $c \ge 0$ esetén. Ezért a Lemma szerint $\tilde{k}(F) \le \tilde{k}(F')$ teljesül G tetszőleges F' feszítő erdejére. $\square$

Köv: Az F' élhalmaz minimális költségű feszítő erdeje G-nek $\iff$ F' c-feszítő tulajdonságú minden $c \ge 0$-ra.

Biz: $\Leftarrow$: Ha F' minden c-re tartalmazza G_c egy feszítő erdejét, akkor a Lemma miatt F' a G minimális költségű erdeje.

$\Rightarrow$: Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy valamely $c > 0$-ra $F' \cap E_c$ nem feszítő erdeje G_c-nek, és legyen F a Kruskal-algoritmus outputja. Mivel F c-feszítő tulajdonságú, ezért $|F' \cap E_c| < |F \cap E_c| =: i$. Így $k(f_i) < k(f'_i)$. Ráadásul a Lemma miatt $k(f_j) \le k(f'_j)\ \forall j$. Így aztán $\tilde{k}(F) < \tilde{k}(F')$, tehát F' nem minimális költségű feszítő erdő, ami ellentmond az indirekt feltevésnek. $\square$

Megj: Összefüggő G gráf esetén a fenti következmény G minimális költségű feszítőfáinak karakterizációja.

Köv: Ha a G gráf összefüggő, akkor G minden feszítő erdeje egy komponensből áll, azaz feszítőfa. Így a Kruskal-algoritmus minimális költségű feszítőfát talál bármely összefüggő G gráfban.

Biz: Láttuk, hogy a Kruskal-algoritmus által megtalált F élhalmaz c-feszítő tulajdonságú minden $c \geq 0$ esetén, ezért F a minimális költségű feszítőfák imént bizonyított karakterizációja miatt egy mkffa élhalmaza. □

2.7 Az ötödik elem

Algoritmusok megadásakor öt dologra figyelünk:
Input ✓, Output ✓, Működés ✓, Helyesség ✓, Lépésszám.

Utóbbiról nem volt szó a Kruskal-algoritmus esetében.

Thf n ill. m a G csúcsai ill. élei száma.
A Kruskal-algoritmus két részből áll:

1. Az élek költség szerinti sorbarendezése

   m szám sorbarendezéséhez a buborékrendezés legfeljebb $\binom{m}{2}$ összehasonlítást használ.
   (A rendezési feladat megoldható $konst \cdot m \cdot \log_2 m$ lépésben is.)

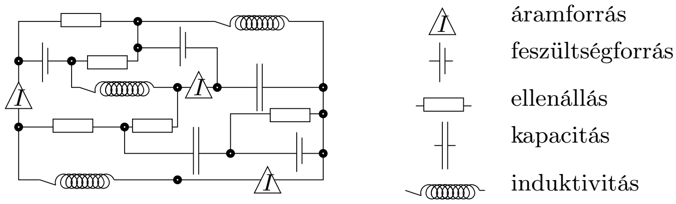
2. Döntés minden egyes élről (a fenti sorrendben).

   Alkalmas adatstruktúra felhasználásával egy n csúcsú G gráf esetén bármely élről a döntés (az adatstruktúra karbantartásával együtt) megvalósítható $konst \cdot \log_2 n$ lépésben. Az összes döntéshez tehát elegendő $konst \cdot m \cdot \log_2 n$ lépés.

A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető $konst \cdot (n+m) \cdot \log_2(n+m)$-mel.

2.8 Mkffák egy villamosmérnöki alkalmazása

Tegyük fel, hogy egy áramkör kétpólusú áramköri elemekből (azaz ellenállásokból, kondenzátorokból, tekercsekből, feszültségforrásokból és áramforrásokból) áll. Az áramkör tkp egy gráf, aminek minden éle egy-egy áramköri elemnek felel meg. Azt, hogy mi történik itt (mik lesznek az élek mentén az áramerősségek, és a gráfcsúcsok között a potenciálkülönbségek), azt az áramkör gráfján felírt Kirchhoff-féle csomóponti- és huroktörvények, az ellenállásokra felírt Ohm-törvények valamint a kapacitív és induktív áramköri elemekre vonatkozó differenciálegyenletek együttesen határozzák meg.



Csomóponti törvény: a gráf egy ponthalmazából kilépő éleken az áramerősségek előjeles összege 0.

Huroktörvény: a gráf tetsz. köre mentén a potenciálkülönbségek összege 0.

Kínzó kérdés: Mikor „értelmes” egy ilyen hálózat?

Akkor, ha a fenti törvényekkel felírt egyenletrendszer **egyértelműen** megoldható.

Nem egyértelmű a megoldás pl akkor, ha G-ben van olyan kör, ami kizárólag feszültségforrásokat tartalmaz. (Ha u.i. a feszültségek előjeles összege nem 0, sérül a huroktörvény, így nincs megoldás. Ha pedig ez az összeg 0, akkor viszont nem egyértelmű a megoldás, hiszen bármely megoldásból kapható egy másik, ahol ezen kör mentén valamekkora plusz áramot körbeküldünk.)

Nem egyértelmű a megoldás akkor sem, ha G csúcsai két részre oszthatók úgy, hogy a két rész közt futó éleken kizárólag áramforrások vannak. (Ha az áramok előjeles összege nem 0, akkor a csomóponti törvény sérül. Ha pedig 0, akkor bármely megoldásban az egyik rész potenciálját konstanssal megemelve egy másik megoldást kapnánk, tehát nem csak egy megoldás lenne.)

Bizonyítható, hogy ha az iménti esetek egyike sem áll fenn, akkor a megoldás egyértelmű, a hálózat „értelmes”. Ennek egy lehetséges bizonyítéka a **normál fa**: G olyan feszítőfája, ami tartalmaz minden feszültségforrást, nincs benne egyetlen áramforrás sem (és emellett (más okból) a lehető legtöbb kapacitást és a legkevesebb induktivitást tartalmazza).

(Ráadásul a normál fához tartozó alapkörökre és alapvágásokra felírt hurok- ill. csomóponti törvények egyértelműen meg is határozzák a megoldást.)

Normál fa keresése: fesz.forrás (1), kapacitás (2), ellenállás (3), induktivitás (4), áramforrás (5) élköltségekhez keressünk mkffát! Ha ez tartalmaz áramforrást, vagy nem tartalmaz minden feszültségforrást, akkor nincs normál fa, egyébként a mkffa egy normál fa. A normál fa létezése esetén pedig egyértelmű a megoldás, és „értelmes” a hálózat.

Mit tanultunk a feszítőfákról?

- Feszítőfa fogalma
- Feszítőfa keresése élek egyenkénti behúzásával és az ÉlHaL szerinti színezés segítségével
- Feszítőfához tartozó alapkör és alapvágás fogalma
- Minimális költségű feszítőfa (feszítő erdő)
- Kruskal mohó algoritmusa
- Minimális költségű feszítő erdők struktúrája
- Normál fák és elektromos hálózatok kapcsolata

3. fejezet

Gráfbejárások és legrövidebb utak

Munkaterv

- Irányítatlan gráfok esetén a csúcsok közötti elérhetőséget a komponensek ill. feszítő erdő segítségével tudjuk kompakt módon leírni. Irányított gráfokban ez a struktúra ennél jóval bonyolultabb.

- Irányított gráfban fogjuk azt vizsgálni, hogy egy megadott csúcsból a gráf milyen más csúcsai érhetők el, majd az elérhető csúcsokba keresünk legrövidebb utat.

- Ennek során (többek között) egy újfajta módszert látunk a feszítőfa (ill. feszítő erdő) keresésére.

- Ezért a továbbiakban irányított gráfokkal foglalkozunk: irányítatlan gráf esetén arra az irányított gráfra gondolunk, amit az irányítatlanból az élek oda-vissza irányításával kapunk. Ezzel a módszerrel az irányított gráfra kapott eredmények az irányítatlan esetre is könnyen átültethetők.

3.1 Általános gráfbejárás

A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel.

Input: $G = (V, E)$ (ir/ir.tatlan) gráf, (esetleg $r \in V$ gyökér[1]).

Minden csúcs az eléretlen → elért → befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált. A bejárás során mindig az alábbi esetszétválasztás szerint bekövetkező esetnek megfelelően történik a következő lépés.

[1] A gyökércsúcs már kezdetben elért állapotú, így kivétel az általános szabály alól.

$\boxed{1.}$ Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.

(1a) Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elértté válik (az uv él mentén).

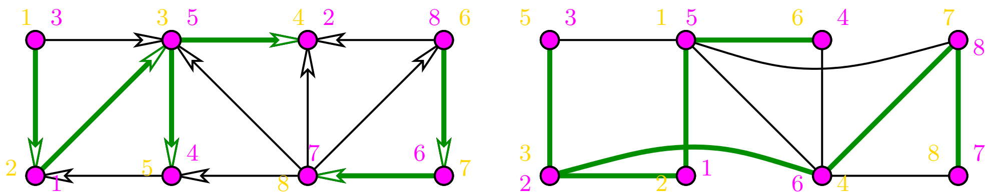
(1b) Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.

$\boxed{2.}$ Nincs elért csúcs.

(2a) Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.

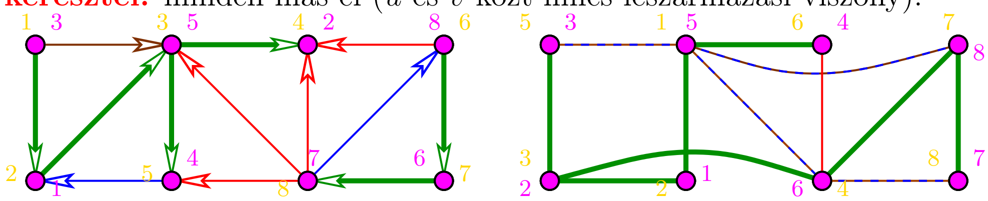
(2b) Ha nincs eléretlen csúcs (azaz $\forall$ csúcs befejezett): END.

Példa: Nézzük meg egy irányított és egy irányítatlan gráf bejárását.



A bejárás kimenete több dolog lehet.

Output: (1) A csúcsok **elérési** és **befejezési** sorrendje.
(2) Az élek osztályozása:
uv **faél:** a v csúcs az uv él mentén vált a bejárás során.
uv **előreél:** nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.
uv **visszaél:** v-ből u-ba faélekből irányított út vezet.
keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazási viszony).



(3) A **bejárás fája**: a faélek alkotta részgráf.
(A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

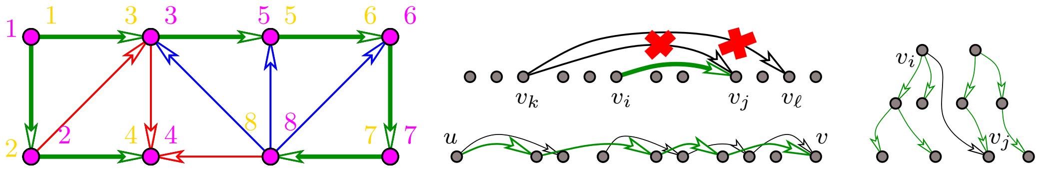
Megf: Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.

Terminológia: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v **őse** és v az u **leszármazottja**. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél pedig leszármazottból ősbe vezet.

3.2 A BFS és tulajdonságai

Szélességi bejárás (BFS) szabálya: Olyan bejárás, ahol
az $\boxed{1.}$ esetben mindig a legkorábban elért u csúcsot választjuk.

Példa: Nézzük meg egy **irányított** gráf BFS bejárását.



A BFS néhány fontos tulajdonságát foglaljuk össze az alábbiakban.

Állítás: Tfh $G = (V, E)$ **BFS bejárása után** a csúcsok elérési sorrendje $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(1) Ha $i < j$, akkor v_i-t hamarabb fejezzük be, mint v_j-t, továbbá v_i gyerekei az elérési sorrendben megelőzik v_j gyerekeit.

(2) **Az elérési és befejezési sorrend megegyezik.**

(3) **Gráfél nem ugorhat át faélt**: ha $k < i < j \leq \ell$ és $v_i v_j$ faél, akkor $v_k v_\ell$ nem lehet gráfél.

(4) Ha P a BFS-fa uv-útja, akkor P legrövidebb uv-út G-ben is.

(5) **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája:** a BFS-fa v_1 gyökeréből bmely v_i csúcsba vezető faút a G egy legkevesebb élű $v_1 v_i$-útja.

(6) Minden él legfeljebb egy szintet lép lefelé a BFS-fában, így **nincs előreél.** (Irányítatlan esetben csak faél és keresztél van.)

Biz: (1): A v_i befejezésének pillanatában v_i minden gyereke elért, de v_j-nek még egy gyereke sem az. Ezért v_j gyerekeit a v_i csúcs befejezése után érjük el, majd ezt követően fejezzük be v_j-t.

(2): Ha v_i-t korábban érjük el, mint v_j-t, akkor (1) miatt v_i-t korábban is fejezzük be v_j-nél. Ezért bármely két csúcs sorrendje ugyanaz az elérési sorrendben mint befejezési sorrendben. Tehát az elérési sorrendnek meg kell egyeznie a befejezési sorrenddel.

(3): Ha $v_k v_\ell \in E(G)$, akkor v_ℓ szülője v_k vagy egy v_k-t megelőző csúcs. (1) miatt v_j szülője sem következhet v_k után, vagyis v_i nem lehet v_j szülője.

(4): Ha P' egy G-beli uv-út, akkor P' egyetlen éle sem ugorhat át P-beli élt. Ezért P' utolsó éle nem kezdődhet korábban P utolsó élénél. Hasonló igaz P' utolsó előtti, stb éleire. Így v-ből nem lehet u-ba visszajutni P élszámánál kevesebb élen.

(5): Közvetlenül adódik (5)-ből.

(6): Ha $v_i v_j$ legalább két szintet lép lefelé, akkor v_1-ből v_j-be nem a BFS-fabeli lenne a legrövidebb út. Ez ellentmond (5)-nek.

Ha pedig lenne előreél, akkor az legalább két szintet lépne lefelé. Most láttuk, hogy ez lehetetlen. $\square$

3.3 Legrövidebb utak

Def: Adott G (ir) gráf és $\ell : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény esetén egy ***P* út hossza** a P éleinek összhossza: $\tilde{\ell}(P) = \sum_{e \in E(P)} \ell(e)$.

Az u és v csúcsok **távolsága** a legrövidebb uv-út hossza: $dist_\ell(u,v) := \min\{\tilde{\ell}(P) : P\ uv\text{-út}\}$ ($\nexists uv$-út $\Rightarrow dist_\ell(u,v) = \infty$.)

Az ℓ hosszfüggvény **nemnegatív**, ha $\ell(e) \geq 0$ teljesül minden e élre.
Az ℓ hosszfv **konzervatív**, ha $\tilde{\ell}(C) \geq 0$ a G bármely C (ir) körére.

Megj: Az ℓ hosszfüggvény konzervatív tulajdonsága azt jelenti, hogy G-ben nincs negatív összhosszúságú irányított kör.

Cél: Legrövidebb út keresése irányított/irányítatlan gráfban.

Megf: Ha $\ell(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $\tilde{\ell}(P)$ a P élszáma. Ezért a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső algoritmusnak is.

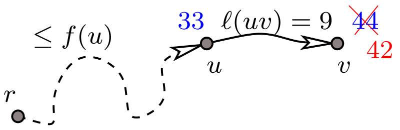
Def: Adott G (ir) gráf, $\ell : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfv. és $r \in V(G)$. **(r,ℓ)-felső becslés** olyan $f : V(G) \to \mathbb{R}$ függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_\ell(r,v) \leq f(v)\ \forall v \in V(G)$.

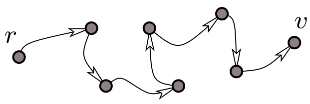
Triviális (r,ℓ)-felső becslés:$f(v) = \begin{cases} 0 & v = r \\ \infty & v \neq r \end{cases}$.

Pontos (r,ℓ)-felső becslés: $f(v) = dist_\ell(r,v)\ \forall v \in V(G)$.

3.4 Az élmenti javítás

Def: Legyen f egy (r,ℓ)-fb és $uv \in E(G)$. Az f **uv-élmenti javítása** az az f', amire $f'(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq v \\ \min\{f(v), f(u) + \ell(uv)\} & z = v \end{cases}$





Megf: Tegyük fel, hogy az $\ell : E(G) \to \mathbb{R}$ hosszfv nemnegatív és $f(r) = 0$. Ekkor (1) Az f (r,ℓ)-fb élmenti javítása mindig (r,ℓ)-fb-t ad.

(2) f (r,ℓ)-fb (pontos) $\iff$ (f-en nincs érdemi élmenti javítás).

Megj: A fenti Megfigyelés teljesüléséhez nem szükséges megkívánni az ℓ hosszfüggvény nemnegativitását: már az is elég, ha ℓ konzervatív.

Biz: (1): Azt kell megmutatni, hogy van olyan rv-út, aminek a hossza legfeljebb $f(u) + \ell(uv)$. Ha egy legrövidebb ru-utat kiegészítünk az uv éllel, akkor olyan rv-élsorozatot kapunk, aminek az összhossza $dist_\ell(r,u) + \ell(uv) \leq f(u) + \ell(uv)$. „Könnyen" látható, hogy az élhosszfv konzervativitása miatt ha van x összhosszúságú rv-élsorozat, akkor van legfeljebb x összhosszúságú rv-út is. Ezek szerint van legfeljebb $f(u) + \ell(u,v)$ hosszúságú uv-út is, azaz az uv élmenti javítás után szintén (r,ℓ)-fb-t kapunk.

(2) $\Rightarrow$: Ha f pontos, akkor biztosan nincs rajta érdmei élmenti javítás: ha volna, akkor egy felső becslés a pontos érték alá csökkenne, így az élmenti javítás eredménye nem lenne (r, ℓ)-fb.

$\Leftarrow$: Legyen $v \in V(G)$ tetsz, és legyen P egy legrövidebb rv-út. A P egyik éle mentén sincs érdemi élmenti javítás, ezért P első, második, harmadik stb csúcsára pontos a felső becslés, azaz $f(u) = dist_\ell(r, u)$ teljesül ezen u csúcsokra. Ez igaz P utolsó csúcsára, a tetszőlegesen választott v-re is. $\square$

Köv: Adott G, nemnegatív (konzervatív) ℓ hosszfüggvény és $r \in V(G)$ gyökér esetén ha kiindulunk a triviális (r, ℓ)-fb-ből, és addig végzünk élmenti javításokat, amíg lehet, akkor a végén megkapjuk minden csúcs r-től való távolságát.

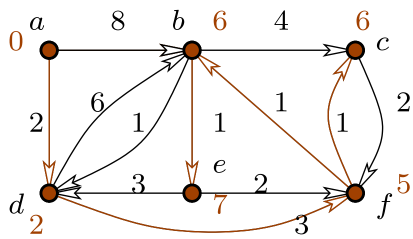
Kérdés: Milyen sorrendben végezzük az élmenti javításokat, ha garantáltan gyorsan szeretnénk végeznünk a feladattal?

Bemelegítés Fontos spec. eset: nemnegatív élhosszok. Ezt vizsgáljuk a következő szakaszban.

3.5 Dijkstra algoritmusa

Dijkstra-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}_+$, $r \in V$.
Output: $dist_\ell(r, v)$ $\forall v \in V$ Működés: $U_0 := \emptyset$, f_0 a triv. (r, ℓ)-fb. Az i-dik fázis $(i = 1, 2, \ldots, |V|)$:
1. Legyen $U_i := U_{i-1} \cup \{u_i\}$, ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális.
2. f_i: f_{i-1} élmenti javítása minden U_i-ből kivezető $u_i x$ élen.
Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(v)$ értékeket beállító éleket.

Példa:



a	b	c	d	e	f
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
0	8	∞	$\boxed{2}$	∞	∞
0	8	∞	2	∞	$\boxed{5}$
0	$\boxed{6}$	6	2	∞	5
0	6	$\boxed{6}$	2	7	5
0	6	6	2	$\boxed{7}$	5

Megf: Ha v-be vezet megjelölt él, akkor vezet út r-ből v-be megjelölt éleken is, és ennek hossza megegyezik $f_{|V|}(v)$-vel.

Biz: $f_{|V|}(r) = 0$, és a megjelölt élek mentén haladva az $f_{|V|}$ érték az élhosszal növekszik. $\square$

Köv: Ha a Dijkstra-algoritmus helyes, akkor az algoritmus végén a megjelölt élek egy legrövidebb utak fáját alkotják r gyökérrel.

3.6 A Dijkstra-algoritmus helyessége

Azt kell igazolnunk, hogy a Dijkstra-algoritmus outputjaként kapott $f_{|V|}$ pontos (r,ℓ)-fb.

Megf: Tfh a Dijkstra-algoritmus G csúcsait $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendben dolgozza fel. Ekkor
(1) $f_{|V|}(u_i) \leq f_{|V|}(u_{i+1})$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq n$ esetén,
(2) $f_{|V|}(u_1) \leq f_{|V|}(u_2) \leq \ldots \leq f_{|V|}(u_n)$, valamint
(3) Az outputként kapott $f_{|V|}$-n élmenti javítás nem tud változtatni.

Biz: (1): Az i-dik fázisban $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$ teljesült az u_i választása miatt. Ezek után $f_i(u_i)$ már nem változott: $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. Ugyan $f_i(u_{i+1})$ még csökkenhetett, de csak az u_iu_{i+1} él mentén történt javítás miatt, hiszen az $(i+1)$-dik fázisban u_{i+1} bekerült az U_{i+1} halmazba, és a hozzá tartozó (r,ℓ)-fb már nem csökken tovább. Mivel $\ell(u_iu_{i+1}) > 0$, ezért $f_{i+1}(u_{i+1}) = \min\{f_i(u_{i+1}), f_i(u_i) + \ell(u_iu_{i+1})\} \geq f_i(u_i)$. Tehát $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1}) = f_{|V|}(u_{i+1})$

(2): Az imént bizonyított (1) rész alapján azonnal következik.

(3): Legyen $u_iu_j \in E(G)$ a G egy tetsz. éle. Ha $i > j$, akkor (2) miatt $f_{|V|}(u_i) \geq f_{|V|}(u_j)$, ezért az u_iu_j mentén történő javítás nem tudja $f_{|V|}(u_j)$-t csökkenteni, hisz $\ell(u_iu_j)$ pozitív.

Ha pedig $i < j$, akkor az i-dik fázisban megtörtént az u_iu_j mentén történő javítás, és ezt követően $f(u_i)$ nem változott, azaz $f_{|V|}(u_i) = f_i(u_i)$. Az $f(u_j)$ becslés viszont tovább csökkenhetett a későbbi élmenti javítások során: $f_{|V|}(u_j) \leq f_i(u_j)$. Ezért az u_iu_j él mentén sem az i-dik fázisban, sem később nem lehetséges érdemi javítás. $\square$

Tétel: A Dijkstra algoritmus helyesen működik, azaz G minden csúcsára igaz, hogy $dist(r,v) = f_{|V|}(v)$.

Biz: A Dijkstra-algoritmus az f_0 triviális (r,ℓ)-fb-ből indul ki, és élmenti javításokat alkalmaz. Így minden f_i (speciálisan $f_{|V|}$ is) (r,ℓ)-fb lesz. A fenti (3)-as megfigyelés miatt $f_{|V|}$-n nem végezhető érdemi élmenti javítás. Ezért egy korábbi (2)-es megfigyelés miatt $f_{|V|}$ pontos (r,ℓ)-fb, azaz $f_{|V|}(v) = dist_\ell(r,v)\ \forall v \in V(G)$. $\square$

„Lépésszámanalízis”: Ha a G gráfnak n csúcsa és m éle van, akkor a Dijkstra-algoritmus n-szer keresi meg egy legfeljebb n elemből álló számhalmaz minimumát. Ez összességében legfeljebb $konst \cdot n^2$ lépést igényel. Ezen kívül legfeljebb m élmenti javítás történik, ami $konst' \cdot m$ lépés. Összességében tehát legfeljebb $konst'' \cdot (n^2 + m)$ lépésre van szükség, az algoritmus hatékony.

A következő két szakaszt nem kérjük számon a vizsgán.

3.7 Legrövidebb utak egy gyökérből mindenhova, konzervatív hosszfüggvény esetén

Könnyű olyan példát mutatni, ahol a Dijkstra-algoritmus még konzervatív hosszfüggvény mellett is hibás eredményt ad, ha negatív élhosszok is fellépnek.

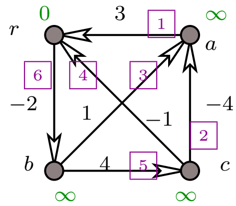
Azonban a kulcsfontosságú korábbi megfigyelésünk konzervatív hosszfüggvény esetén is igaz, nevezetesen, hogy

- (r,ℓ)-fb élmenti javítása (r,ℓ)-fb-t eredményez, ill.
- ha egy f (r,ℓ)-fb-en nem végezhető érdemi émj, akkor f pontos (r,ℓ)-fb.

Konzervatív hosszfv esetén is a Dijkstra-algoritmusban használthoz hasonló a stratégiát követünk: addig végzünk émj-okat a triviális (r,ℓ)-fb-ből kiindulva, amíg érdemi javítás lehetséges.

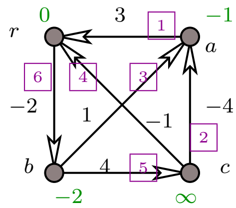
Ford-algoritmus: Input: $G=(V,E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}, r \in V$.
Output: $dist_\ell(r,v)$ $\forall v \in V$ Működés: f_0 a triv. (r,ℓ)-fb, $|V|=n$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$.
Az i-dik fázis $i=1,2,\ldots,n-1$-re az alábbi.
f_i-t f_{i-1}-ből kapjuk, az $e_1,\ldots,e_m$ élmenti javítások után.
OUTPUT: $dist_\ell(r,v)=f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.

1. fázis



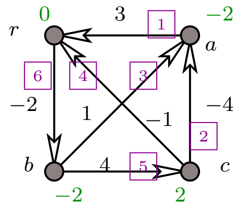
	r	a	b	c
f_0	0	∞	∞	∞
f_1	0	∞	-2	∞

2. fázis



	r	a	b	c
f_0	0	∞	∞	∞
f_1	0	∞	-2	∞
f_2	0	-1	-2	2

3. fázis



	r	a	b	c
f_0	0	∞	∞	∞
f_1	0	∞	-2	∞
f_2	0	-1	-2	2
f_3	0	-2	-2	2

Állítás: Ha ℓ konzervatív, akkor $dist_\ell(r,v)=f_{n-1}(v)$ $\forall v \in V$.

Biz: Ha van $\le$ 1-élű legrövidebb rv-út, akkor világos, hogy $f_1(v)=dist_\ell(r,v)$, hiszen az út éle mentén valamikor javítunk az 1. fázisban. Ezért ha van $\le$ 2-élű legrövidebb rv-út, akkor $f_2(v)=dist_\ell(r,v)$, hiszen az út r-et követő csúcsán pontos érték van beállítva az 1. fázis végén, és az út második éle mentén javítunk valamikor a 2. fázis során. Ezért a 2. fázis végére $f(v)$ pontos lesz. Megismételve ugyanezt a gondoloatmenetet, azt kapjuk, hogy az $(n-1)$-edik fázis végén minden csúcshoz pontos lesz a kapott felső becslés, hiszen r-ből bármely v csúcsba vezet legfeljebb $n-1$ élből álló legrövidebb út. $\square$

Megf: Ha $f_i=f_{i-1}$, akkor a Ford-algoritmust már az i-dik fázis után be lehet fejezni, hisz onnantól nincs több érdemi élmenti javítás, így $f_{n-1}=f_i$.

Megj: Az $f_{n-1}(v)$-t beállító élek legrövidebb utak fáját alkotják.

Biz: A Dijkstra esethez hasonló. Tetsz. v csúcsból visszafelé követve a végső értékeket beállító éleket, egy $f_{n-1}(v)$ hosszúságú rv-utat találunk. □

„Lépésszámanalízis": Ha a $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m$, akkor minden fázisban m élmenti javítás történik , ami $konst \cdot m$ lépés. Ez összesen $\leq konst \cdot (n-1) \cdot m \leq konst \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

3.8 Legrövidebb utak bármely két csúcs között, konzervatív hosszfüggvény esetén

Bemutatunk egy egészen más gondolatra építő, élmenti javítást nem használó algoritmust is legrövidebb utak keresésére. Látni fogjuk, hogy az algoritmus lépésszáma a Ford-algoritmuséval összevethető, ámn nem csak egy gyökércsúcs és a többi csúcs között, hanem az inputgráf bármely két csúcsa között meghatározza a távolságot. Az algoritmus kulcsa az alábbi távolságfogalom.

Tfh $G = (V, E)$, $\ell : E \to \mathbb{R}$ és $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Jelölje $d^{(k)}(i,j)$ a legrövidebb olyan v_iv_j-út hosszát, aminek belső csúcsai csak $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lehetnek.

Megf: (1) $d^{(n)}(i,j) = dist_\ell(v_i, v_j)$. (2) $d^{(0)}(i,i) = 0$, $v_iv_j \in E \Rightarrow d^{(0)}(i,j) = \ell(v_iv_j)$, különben $d^{(0)}(i,j) = \infty$.

(3) Ha ℓ konzervatív, akkor tetsz. i, j ill. $k \leq n$ esetén $d^{(k+1)}(i,j) = \min\{d^{(k)}(i,j), d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)\}$ teljesül.

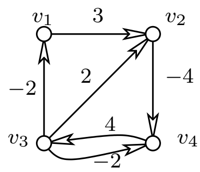
Biz: Tekintsünk egy $d^{(k+1)}(i,j)$-t meghatározó P utat.

I. eset: $v_{k+1} \notin P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,j)$, és $d^{(k+1)}(i,j) \leq d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)$.

II. eset: $v_{k+1} \in P$. Ekkor $d^{(k+1)}(i,j) \leq d^{(k)}(i,j)$, és $d^{(k+1)}(i,j) = d^{(k)}(i,k+1) + d^{(k)}(k+1,j)$.

Mindkét esetben helyes a képlet. □

Floyd-algoritmus: Input: $G = (V, E)$, konzervatív $\ell : E \to \mathbb{R}$. Output: $dist_\ell(u,v)$ $\forall u, v \in V$ Működés: $d^{(0)}$ felírása (2) alapján. Az i-dik fázis: $d^{(i-1)}$-ből meghatározzuk $d^{(i)}$-t (3) alapján. OUTPUT: $d^{(n)}(u,v) = dist_\ell(u,v)$ $\forall u, v \in V$.



$d^{(0)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	∞
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	2	0	-2
v_4	∞	∞	4	0

$\mapsto$

$d^{(1)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	∞
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	**1**	0	-2
v_4	∞	∞	4	0

$d^{(1)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	∞
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	1	0	-2
v_4	∞	∞	4	0

$\mapsto$

$d^{(2)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	**-1**
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	1	0	**-3**
v_4	∞	∞	4	0

$d^{(2)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	-1
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	1	0	-3
v_4	∞	∞	4	0

$\mapsto$

$d^{(3)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	-1
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	1	0	-3
v_4	**2**	**5**	4	0

$d^{(3)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	∞	-1
v_2	∞	0	∞	-4
v_3	-2	1	0	-3
v_4	2	5	4	0

$\mapsto$

$d^{(4)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	**3**	-1
v_2	**-2**	0	**0**	-4
v_3	-2	1	0	-3
v_4	2	5	4	0

„Lépésszámanalízis": A $d^{(0)}$ felírása $konst \cdot n^2$ lépés. Minden fázis $konst' \cdot n^2$. Mivel összesen n fázis van, a lépésszám legfeljebb $konst'' \cdot n^3$ lépés, az algoritmus hatékony.

Ford vs Floyd: Konzervatív hosszfüggvényre működnek helyesen.
Mindkét algoritmus észreveszi, ha ℓ nem konzervatív. (!!)
Legrövidebb utak is találhatók ezekkel az algoritmusokkal: Ford a gyökérből bárhová, Floyd pedig bmely két csúcs között. (!!)
A Ford ritka gráfokra jelentősen olcsóbb, sok él esetén a Floyd nem sokkal drágább.

Mit tanultunk a gráfbejárásokról és legrövidebb utakról?

- Gráfbejárás fogalma
  (csúcsok evolúciója, élek osztályozása, bejárás fája)
- BFS (elérési és befejezési sorrend megegyezik, nincs se faélt átugró gráfél, se előreél, de van legrövidebb utak fája)
- Legrövidebb út keresése (r, ℓ)-fb élmenti javításával, Dijkstra
- Ford- és Floyd-algoritmus konzervatív hosszfv esetén

4. fejezet

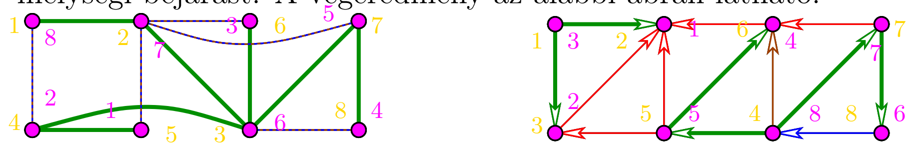
Mélységi keresés és PERT

Láttuk, hogy ha az általános gráfbejárás esetén azzal a megszorítással élünk, hogy az $\boxed{1.}$ esetben mindig a legkorábban elértté vált csúcsot választjuk, akkor a szélességi bejárást kapjuk. Láttuk azt is, hogy számos hasznos tulajdonsága van ennek a bejárásnak, például a segítségével tetszőleges gyökércsúcsból megkereshetjük a legrövidebb utak fáját. A továbbiakban egy másik megszorítással élünk, mégpedig olyannal, ami szöges ellentéte a BFS-t definiálónak.

4.1 Depth First Search

Def: A **mélységi bejárás** (avagy **DFS**) olyan bejárás, amikor az $\boxed{1.}$ esetben (amikor van elért csúcs) mindig a legutolsónak elért csúcsot választjuk.
Mélységi és befejezési számozás: DFS után $m(v)$ ill. $b(v)$ a v csúcs elérési ill. befejezési sorrendben kapott sorszáma.

Példa: Fürgén lefuttattunk egy irányítatlan és egy irányított gráfon egy-egy mélységi bejárást. A végeredmény az alábbi ábrán látható.



Megj: A BFS konkrét megvalósításában szükség van arra, hogy az elért csúcsokat úgy tároljuk, hogy könnyű legyen kiválasztani az elért csúcsok közül a legkorábban elértet. Erre egy célszerű adatstruktúra a *sor* (avagy *FIFO lista*). Ha a BFS egy konkrét megvalósításában ezt az adatstruktúrát *veremre* (más néven *LIFO listára*) cseréljük, akkor ezzel a DFS-t valósítjuk meg.

Megf: A G gráfon futtatott DFS után az élek osztályozására az alábbiak teljesülnek.
(1) Ha uv faél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(2) Ha uv előreél, akkor $m(u) < m(v)$ és $b(u) > b(v)$.

(3) Ha uv visszaél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) < b(v)$.
(4) Ha uv keresztél, akkor $m(u) > m(v)$ és $b(u) > b(v)$.
(5) **Irányítatlan gráf DFS bejárása után nincs keresztél.**
(6) **Ha DFS után van visszaél, $\Rightarrow$ G-ben van irányított kör.**
(7) **Ha DFS után nincs visszaél $\Rightarrow$ G-ben nincs irányított kör.**

Biz: (1): v-t u-ból értük el, ezért $m(u) < m(v)$. A v elérésekor u és v elért állapotúak. A DFS szabálya szerint mindaddig, amíg v elért állapotú, u-val nem foglalkozunk. Tehát u-t csakis v befejezése után fejezhetjük be, azaz $b(u) > b(v)$.

(2): Mivel uv előreél, ezért u-ból v-be egy faélekből álló irányított út vezet a DFS-fában. (1) miatt a faélek mentén a mélységi szám mindvégig növekszik, a befejezési pedig csökken.

(3): Mivel uv visszaél, ezért v-ből u-ba egy faélekből álló irányított út vezet a DFS-fában. (1) miatt a faélek mentén a mélységi szám mindvégig növekszik, a befejezési pedig csökken.

(4): $m(u) < m(v)$ esetén a DFS miatt v az u leszármazottja lenne. Ezért $m(u) > m(v)$. Ha u-t a v befejezése előtt érnénk el, akkor u a v leszármazottja lenne. Ezért az alábbi sorrendben történik u és v evolúciója: v elérése, v befejezése, u elérése, u befejezése.

(5): Indirekt. Ha uv keresztél, akkor (4) miatt $m(u) > m(v)$, továbbá vu is keresztél, ezért $m(v) > m(u)$. Ellentmondás.

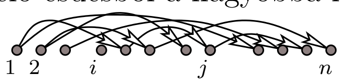
(6): Irányított gráf bármely bejárása esetén a bejárási fa visszaélhez tartozó alapköre irányított kör az eredeti gráfban.

(7): Minden irányított körben van olyan uv él, amire $b(u) < b(v)$. Ez az él csakis visszaél lehet. Így ha nincs visszaél, ir. kör sincs. $\square$

4.2 Directed Acyclic Graphs

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf **aciklikus** (más néven **DAG**), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Példa: DAG-ot pl úgy kaphatunk, hogy egy G irányítatlan gráf csúcsait csupa különböző számmal megszámozzuk, és minden élt a kisebb számot viselő csúcsból a nagyobba irányítunk.



Ha ugyanis lenne az így megirányított gráfban irányított kör, akkor az élei mentén a számozás végig növekedne, ami lehetetlen.

Azt fogjuk igazolni, hogy a fenti példa minden DAG-ot leír.

Def: A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcsainak **topologikus sorrendje** alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból vezet a sorban későbbi csúcsba. (Azaz $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, ahol $v_i v_j \in E \Rightarrow i < j$.)

Tétel: A G irányított gráf pontosan akkor DAG, a G csúcsainak van topologikus sorrendje.

Biz: $\Leftarrow$: Tfh $\exists$ top. sorrend. Láttuk, hogy G ekkor DAG. ✓

$\Rightarrow$: Most tfh G DAG, és futtassunk rajta egy DFS-t. Láttuk, hogy a DFS után nem lesz visszaél, tehát $b(u) > b(v)$ teljesül G minden uv élére. Ezért a csúcsok befejezési sorrendjének megfordítása a G csúcsainak egy topologikus sorrendje. □

Köv: Irányított gráf aciklikussága DFS-sel gyorsan eldönthető: ha van visszaél, akkor a visszaél DFS-fabeli alapköre G egy irányított köre. Ez bizonyítja, hogy G nem DAG. Ha pedig nincs visszaél a DFS után, akkor a fordított befejezési sorrend a G egy topologikus sorrendje. Ez világosan mutatja, hogy G DAG.

Megj: DAG egy topologikus sorrendjét forráskeresések és forrástörlések alkalmazásával is megtalálhatjuk.

4.3 Leghosszabb út keresése

Első pillantásra haszontalannak tűnik, de matematikailag érdekes kérdés egy gráf két csúcsa között a leghosszabb út megtalálása. Legrövidebb utat tudunk keresni; tudunk vajon leghosszabbat is?

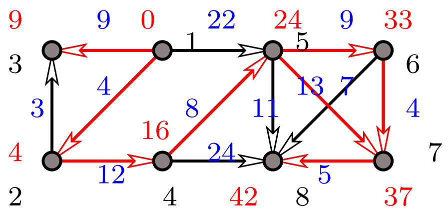
Ötlet: Az $\ell'(uv) = -\ell(uv)$ élhosszokkal a leghosszabb utak legrövidebbekké válnak. Olyanokat pedig tudunk keresni.

Gond: Az eddig látott módszerek csak konzervatív élhosszokra működnek. Ha azonban van a gráfban irányított kör, akkor ez az ötlet általában nem segít. Irányított esetben ugyanis kizárólag akkor konzervatív egy csupa negatív élhosszokat tartalmazó hosszfüggvény, ha a gráfban nincs irányított kör, azaz ha G DAG. Ekkor persze a Ford vagy Floyd algoritmusok bármelyike használható.

Jó hír: Van egy még gyorsabb módszer: a dinamikus programozás. Ennek segítségével tetsz. G DAG minden v csúcsához ki tudjuk számítani a v-be vezető leghosszabb utat. (Sőt! ...)

Leghosszabb út DAG-ban Input: $G = (V, E)$ DAG, $\ell : E \to \mathbb{R}$.
Output: $\max\{\ell(P) : P \text{ } v\text{-be vezető út}\}$ minden $v \in V$ csúcsra.

Működés: $\boxed{1}$ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ top. sorrend meghatározása.
$\boxed{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n$: $f(v_i) = \max\{\max\{f(v_j) + \ell(v_j v_i) : v_j v_i \in E\}, 0\}$
Output: $f(v)$ $\forall v \in V$



Helyesség: Ha a v_i-be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j, akkor $f(v_i) = f(v_j) + \ell(v_j v_i)$. □

Megj: Ha a fenti algoritmusban minden csúcsra megjelöljük az $f(v)$ értéket beállító élt (éleket), akkor a megjelölt élek minden v csúcsba megadnak egy leghosszabb utat. Sőt: a v-be vezető leghosszabb utak mindegyike megkapható így.

Kínzó kérdés: Van-e bármi értelme leghosszabb utakat keresni?

4.4 A PERT probléma

Képzeljük el, hogy egy $a, b, \ldots$ tevékenységekből álló projektet kell végrehajtanunk.
Precedenciafeltételek: bizonyos (u, v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltével kezdhető.
Cél: $t = 0$-beli kezdéssel a teljes projekt leggyorsabb végrehajtása a precedenciafeltételek figyelembevételével, azaz minden v tevékenységehez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpont meghatározása, ami nem sérti a preferenciafeltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (vagyis a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

A feladathoz tartozó G **irányított gráf** csúcsai a tevékenységek, élei pedig a precedenciafeltételek, az uv él hossza $c(uv)$.

Megf: (1) Ha G-ben van irányított kör (azaz ha G nem DAG), akkor a projekt nem hajtható végre.

(2) Ha G DAG, akkor minden v tevékenység legkorábbi kezdési időpontja a v-be vezető leghosszabb út hossza.

Köv: A PERT probléma megoldása nem más, mint a G DAG minden csúcsára az oda vezető leghosszabb út meghatározása.

Megj: Szokásos felvenni két virtuális tevékenységet: az egyik az s, ami a „projekt kezdete”: s-ből minden más tevékenységbe irányított él vezet 0 időkorláttal. A másik virtuális tevékenység pedig t, ami a projekt vége: t-be minden más tevékenységből irányított éle vezet, szintén 0 időkorláttal. Ezáltal a gráf leghosszabb útjának keresése egy leghosszabb st-út keresésére egyszerűsödik.

Terminológia: G leghosszabb útja **kritikus út**, amiből több is lehet. Kritikus út csúcsai a **kritikus tevékenységek**.

Megf: Ha egy kritikus tevékenység nem kezdődik el a lehető legkorábbi időpontban, akkor az egész projekt végrehajtása csúszik.

Mit tanultunk a mélységi keresésről?

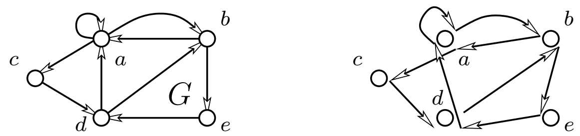
- DFS: a BFS „ellentéte” (verem $\leftrightarrow$ FIFO)
- A DFS tulajdonságai, élek osztályozása a végpontok mélységi és befejezési számai alapján
- Irányítatlan DFS után nincs keresztél
- DAG, DFS visszaélek és topologikus sorrend kapcsolata
- Leghosszabb út keresése DAG-ban
- Projektmenedzsment PERT-módszerrel

5. fejezet

Euler-séták és Hamilton-körök

5.1 Euler-séták

Def: A G gráf **Euler-(kör)sétája** a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.



Megj: (1) A fenti definíció 2×2 fogalmat definiál: az Euler-sétát és az Euler-körsétát irányítatlan és irányított gráfra is.

(2) Szokás a definíciót abban a formában kimondani, hogy az Euler-(kör)séta G minden élét **pontosan** egyszer tartalmazza. Tekintettel arra, hogy egy séta nem mehet át kétszer ugyanazon az élen, ez redundáns kívánalom, hiszen következménye az általunk használt definíciónak. Használatos ezen kívül az Euler-kör ill. Euler-út megnevezés is a fenti fogalmakra.

(3) Irányítatlan Euler-séta: „G egy vonallal lerajzolható".

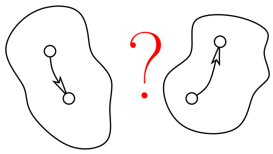
Cél: Gyors módszer az Euler-(kör)séta megtalálására, létezésének ellenőrzésére.

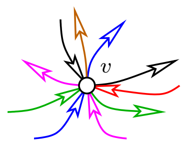
Megf: (1) Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és (b) $\rho(v) = \delta(v)$ minden v csúcsára.

(2) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-ben minden fokszám páros.

(3) Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor
(a) G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
(b) G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Biz: (a) Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből.





(b) Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor pontosan annyiszor lépünk be a v csúcsba ill. ki a v csúcsból, ahányszor áthalad a körséta a v csúcson. Mivel a körséta G minden élét pontosan egyszer érinti, ezért $\rho(v) = \delta(v)$.

(2): Az irányított esethez hasonló. (a) Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is egy-egy élét, és
(b) az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért $d(v)$ páros.

(3): (a)✓. (b): Tfh G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden $w \neq u, v$ csúcsra $d(w)$ kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis $d(w)$ páros. Ha $u = v$, akkor az Euler-séta körséta, így $d(u)$ is páros (2b) miatt. Ha pedig $u \neq v$, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis $d(u)$ és $d(v)$ páratlanok. □

Megj: A fenti **Megfigyelés** segítségével **bizonyos** esetekben azonnal látszik, hogy G-nek nincs Euler-sétája ill. -körsétája.

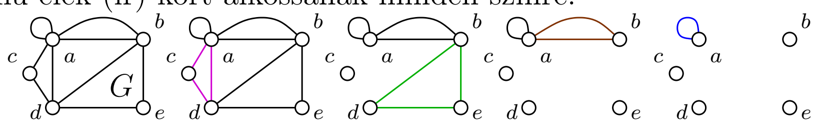
Kínzó kérdés: Lehet-e a **Megfigyelés**ben leírtaktól eltérő oka annak, hogy egy G gráfnak nincs Euler-(kör)sétája?

Megnyugtató válasz: Nem lehet.

5.2 Az Euler-tulajdonság karakterizációja

Def: A G irányított gráf **Euler-gráf**, ha $\delta(v) = \rho(v)\ \ \forall\, v \in V(G)$.
A G irányítatlan gráf **Euler-gráf**, ha G $d(v)$ páros $\forall\, v \in V(G)$.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.



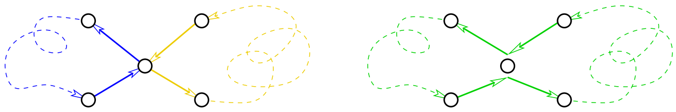
Biz: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törölve $G - C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G - C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapjuk a C_2, $C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_i kör éleit az i-dik színnel. □

(Fent az irányítatlan esetet illusztráltuk, irányított esetben az érvelés ugyanez, az ábrákon pedig irányított élek kellenének.)

Tétel: (1) (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$

(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
(2) (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) $\Longleftrightarrow$
(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
(3) (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) $\Longleftrightarrow$
(G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)

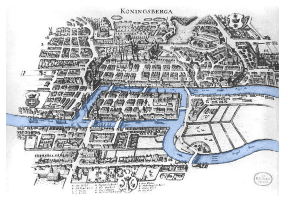
Biz: (1), (2): $\Rightarrow$: Láttuk. ✓$\Leftarrow$: A **Lemma** miatt $E(G)$ felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, amiknek van közös csúcsa és ezen csúcs mentén az alábbi ábra szerint „összevarrjuk” azokat. Mindezt addig tudjuk végezni, míg végül csak egyetlen körséta marad. □



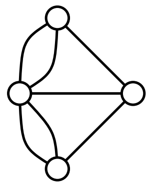
(3): $\Rightarrow$: Láttuk. ✓$\Leftarrow$: Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G ptn fokú csúcsai. Ekkor $G + uv$ Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy ezen körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk. □

Euler-körséta keresése Euler-gráfban: $E(G)$-t felbontjuk körsétákra, amiket összevarrunk. Körsétát a felbontáshoz pl. úgy is kereshetünk, hogy addig követünk egy sétát, amíg tudunk. Előbb-utóbb elakadunk, de ez csakis a séta kiindulási pontjában történhet meg. Ezért a bejárt séta egy körséta, amit a felbontásban felhasználunk.

5.3 Történelem



Leonhard Euler a porosz Königsbergben élt és alkotott. Különös probléma tartotta lázban akkortájt a helyi polgárokat: tervezhető-e olyan útvonal a városban, ami mind a hét hidat pontosan egyszer érinti?

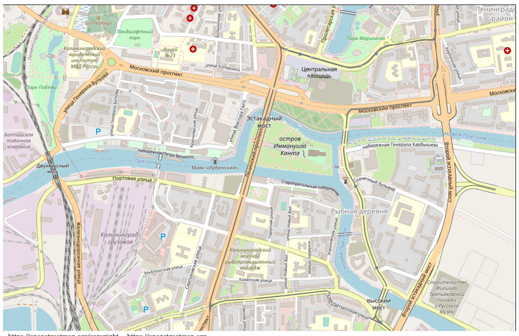


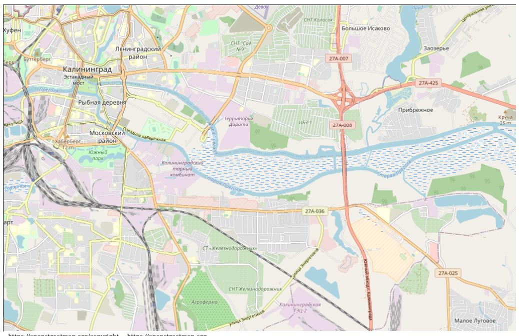
Euler megfigyelte, hogy csak a hidakon való áthaladás sorrendje számít, az nem, hogy az egyes szárazföldeken miféle útvonalat követünk. Ezért a szárazfölddarabokat ponttal, a hidakat ezen pontokat összekötő vonalakkal ábrázolta. Az így adódó gráfon épp egy (mai szóhasználattal) Euler-séta létezése volt a kérdés.

A gráf mind a 4 csúcsa páratlan fokszámú, ezért hiú ábránd a fenti tulajdonságú útvonal megtalálása.

Königsberg mai neve Kalinyingrád, és a Kalinyingrádi terület nevű orosz exklávé székhelyeként stratégiai jelentősége van. A korableli hidak közül több már nem létezik.

Nem véletlen egyébként, hogy a keleti szigetnek csak egy része látható a szokásos szemléltető ábrákon.





5.4 Hamilton-körök és -utak

Def: A G gráf **Hamilton-köre** (**Hamilton-útja**) a G olyan köre (útja), ami G minden csúcsát tartalmazza.

Megj: A célunk hasonló, mint az Euler-(kör)séta esetén, azaz gyors módszer, amivel el lehet dönteni egy gráfról, hogy van-e Hamilton-köre ill. -útja.

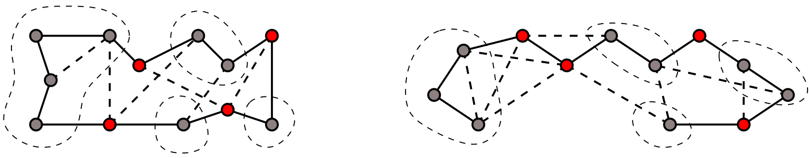
Sajnos jól használható szükséges **és** elégséges feltételt nem tudunk adni erre a problémára, és jó oka van annak, hogy nem is számítunk ilyen feltétel létezésére. Tudunk viszont jól használható szükséges, és jól használható elégséges feltételt adni, de ezek csak bizonyos gráfok esetén segítenek a megoldáshoz.

Szükséges feltétel Hamilton-kör és -út létezésére

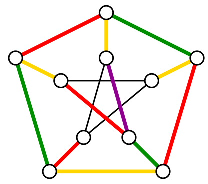
(1) Ha a G gráfnak van Hamilton-köre, akkor bármely nemüres $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U|$.

(2) Ha a G gráfnak van Hamilton-útja, akkor bármely $U \subseteq V(G)$ esetén $G - U$ komponenseinek száma legfeljebb $|U| + 1$.

Megj: A fenti feltétel szerint k csúcs törlésétől a gráf legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponensre eshet szét. Ez feltétlenül **szükséges** ahhoz, hogy G-nek legyen Hamilton-köre (ill. -útja). Csupán abból, hogy G-re teljesül ez a feltétel, nem következik, hogy G-nek csakugyan van Hamilton-köre (vagy -útja). Ám ha a szükséges feltétel nem teljesül egy G gráfra, az azonnal cáfolja G-ben a Hamilton-kör (ill. -út) létezését. Ha pl. egy G gráf 42 csúcs törlése nyomán 43 komponensre esik szét, akkor G-nek bizonyosan nincs Hamilton-köre. Ha pedig ez a komponensszám legalább 44, akkor afelől is biztosak lehetünk, hogy G-nek még Hamilton-útja sincs.



Biz: (1,2) G-re tekinthetjük úgy, mint egy körre (ill. útra), amihez további éleket adunk hozzá. Könnyű látni, hogy egy kör (ill. út) k pont elhagyásától legfeljebb k (ill. $k+1$) komponensre eshet szét. A további élek (amit a körhöz ill. úthoz adunk G felépítéséhez) az ÉlHaL miatt csak csökkenteni tudják a komponensek számát, növelni nem. Ezért G-ből k csúcsot törölve legfeljebb k (ill. $k+1$) komponens keletkezhet. □



Megj: Az ábrán látható Petersen-gráfnak (sok más mellett) két érdekes tulajdonsága van.
(1) Teljesül rá a fenti, szükséges feltétel.
(2) Nincs Hamilton-köre.

Biz: (1): Tfh külső körből k_1, a belsőből k_2 csúcsot hagytunk el. Ha $k_1 = 0$ vagy $k_2 = 0$, akkor a gráf összefüggő marad. Különben a külső kör legfeljebb k_1, a belső pedig legfeljebb k_2 részre esik szét, vagyis összesen legfeljebb $k_1 + k_2$ komponens keletkezik.

(2): Ha lenne H-kör, akkor e kör 10 élét felváltva pirosra és zöldre tudnánk színezni. Ha a körön kívüli élek sárgák, akkor a 3-regularitás miatt minden csúcsból pontosan egy piros, egy sárga és egy zöld él indulna. Ha megpróbáljuk az éleket így kiszínezni, kiderül, hogy nem lehet. Ugyanis a külső kör éleinek színezése lényegében egyértelmű: mivel két szín nem elég rá, mind a hármat használni kell. Valamelyik színt csak egy élhez használjuk, a többi élt pedig felváltva színezzük a másik két színnel. Ez a színezés már meghatározza a külső és belső kört összekötő élek színeit, és a belső kör éleit színezve hamar ellentmondásra jutunk. □

Megj: A továbbiakban Hamilton-kör létezését igazoló, könnyen ellenőrizhető elégséges feltételeket fogunk mutatni. Ha ezek bármelyike teljesül egy G gráfra, akkor G-nek van Hamilton-köre. Pusztán abból, hogy egy G gráfra nem teljesül az elégséges feltétel, semmiféle következtetés nem vonható le G Hamilton-körének létezéséről.

Def: Legyen egy G n-csúcsú, egyszerű gráf.
Az $u, v \in V(G)$ csúcspár **gazdag**, ha $d(u) + d(v) \geq n$.
A G gráfra teljesül a **Dirac-feltétel**, ha $d(v) \geq \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$-re.
A G gráfra teljesül az **Ore-feltétel**, ha G bármely két nem szomszédos csúcsa gazdag párt alkot: $uv \notin E \Rightarrow d(u) + d(v) \geq n$.

Dirac tétele: G-re igaz a Dirac-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

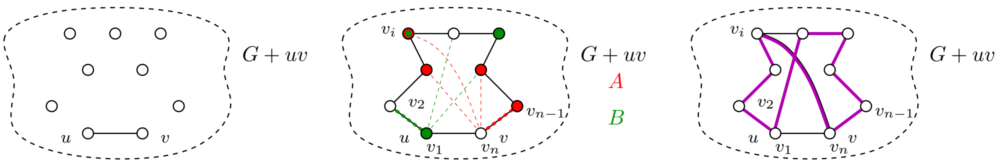
Ore tétele: G-re igaz az Ore-feltétel $\Rightarrow$ G-nek van H-köre.

Megj: A Dirac-feltétel többet kíván, mint az Ore-feltétel. Ezért Ore tétele erősebb Diracénál, u.i. kevesebbet feltételez, de ugyanazt igazolja. Az Ore-tétel bizonyítása ezért Dirac tételét is igazolja.

5.5 A Chvátal-lezárt

Hízlalási lemma: Tegyük fel, hogy G egyszerű gráf, és (u, v) gazdag pár. Ekkor $\quad$ (G-nek van Hamilton-köre) $\Longleftrightarrow$ ($G + uv$-nek van Hamilton köre).

Megj: A hízlalási lemma jelentősége az, hogy segít eldönteni azt, hogy van-e G-ben Hamilton-kör. Azt mondja ki ugyanis, hogy G-ben a gazdag párok közé „ingyen" húzhatunk be éleket, mert ez nem változtat azon a tényen, hogy van-e Hamilton-köre a vizsgált gráfnak. Megtehetjük tehát, hogy a lemma segítségével addig húzunk be éleket a gráfba, amíg lehet. Ha az így adódó $\widehat{G}$ gráfban (G ú.n. Chvátal-lezártjában) találunk Hamilton-kört, akkor G-nek is bizonyosan van Hamilton-köre. Ha pedig $\widehat{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört, akkor persze G-ben sincs.



Biz: $\Rightarrow$: Világos, hogy ha C a G Hamilton köre, akkor C egyúttal $(G + uv)$-nek is Hamilton-köre.
$\Leftarrow$: Legyen C a $G + uv$ H-köre. Ha $uv \notin C$, akkor C a G-nek is H-köre, kész vagyunk. Ha viszont $uv \in C$, akkor $C - uv$ a G egy H-útja. Legyen ez a H-út $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$. Legyen $A := N(v) = \{v_i : vv_i \in E(G)\}$ a v szomszédainak halmaza, és legyen $B := \{v_{i-1} : uv_i \in E(G)\}$ az u szomszédait a H-úton megelőző csúcsok halmaza.

Világos, hogy $v \notin A$ és $v \notin B$, így $|A \cup B| \leq n - 1$. Mivel (u, v) gazdag pár, ezért $|A| + |B| = d(u) + d(v) \geq n$. Ezek szerint $A \cap B \neq \emptyset$. Legyen pl. $v_i \in A \cap B$. Ekkor $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}, v_1$ a G egy H-köre. $\square$

Ore tétele: Ha G bármely két nemszomszédos csúcsa gazdag párt alkot, akkor G-nek van H-köre.

Biz: A hízlalási lemma alapján G bármely két nemszomszédos csúcsát „ingyen" összeköthetjük. Így G Chátal-lezártja a $\widehat{G} = K_n$ teljes gráf. Mivel K_n-nek van H-köre, ezért G-nek is van. $\square$

Dirac-tétel: Ha $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$, akkor G-nek van H-köre.

Biz: G bármely két csúcsa gazdag párt alkot, ezért G-re teljesül az Ore-feltétel. Az Ore-tétel miatt G-nek van H-köre. $\square$

(Egyébként közvetlenül is látszik, hogy $\widehat{G} = K_n$.)

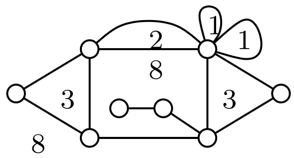
Mit tanultunk Euler-sétákról és Hamilton-utakról?

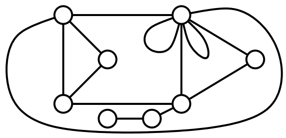
- Irányított/irányítatlan Euler-(kör)séta létezése két egyszerűen ellenőrizhető feltételen múlik.
- Mindkettő fontos, ha nem akarunk a ZH-n pontot veszíteni.
- Hamilton-körökre és utakra nincs könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltétel.
- A tanult szükséges feltétel **sérülése** cáfolja a Hamilton-kör/út létezését.
- Bármelyik tanult elégséges feltétel **teljesülése** igazolja a Hamilton kör létezését.
- A hízlalási lemma rendkívül hatékony eszköz a Hamilton-kör létezésének eldöntéséhez.

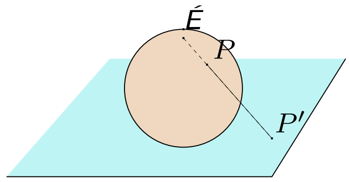
6. fejezet

Síkgráfok

6.1 Síkbarajzolhatóság







Def: **Síkbarajzolt** (**SRt**) gráf alatt olyan gráf**diagramot** értünk, amiben az élek nem keresztezik egymást.
A G gráf **síkbarajzolható** (**SRható**), ha van SRt diagramja.
Síkbarajzolt gráf **tartománya** (**lapja**): a diagram komplementerének összefüggő tartománya. A nem korlátos rész neve **külső tartomány**.

Megj: (1) A fentieket nem csak egyszerű gráfokra definiáltuk.
(2) A SRt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy **konkrét** diagram.
(3) Ugyanannak a SRható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet.
(4) A gömbre (tóruszra) rajzolhatóság hasonlóan definiálható.

Állítás: (A G gráf SRható) $\iff$ (G gömbre rajzolható)

Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz ($\Rightarrow$ ✓), és az $É$-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A $\Leftarrow$ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az $É$-n ne menjen át él. $\square$

Köv: SRt gráf külső tartománynak nincs kitüntetett szerepe.

Biz: Bármely lerajzolás „kifordítható”: a diagram átrajzolható úgy, hogy a kiválasztott tartomány legyen a külső tartomány.

1. Vetítsük fel a diagramot a gömbre.

2. Állítsuk az $É$-t a kiválasztott tartománynak megfelelő gömbi tartomány belsejébe.
3. A gömbre rajzolt gráfot vetítsük vissza a síkra. □

Köv: Bármely konvex poliéder élhálója SRható gráf.

Biz: A kx poliéder belső pontjából az élháló kivetíthető egy, a poliédert tartalmazó gömbre. Így az élhálóból gömbre rajzolt gráf lesz. Láttuk, hogy minden gömbre rajzolható gráf SRható. □

Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

Terminológia: SRt G gráf esetén $\mathbf{n}, \mathbf{e}, \mathbf{t}$ ill. $\mathbf{k}$ jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G SRt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} \ell_i = 2e$ ahol ℓ_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is. □

Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a SRt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha egy SRható gráf fokszámairól van információnk.

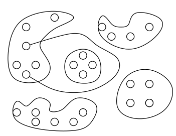
Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyszerű SRható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz. □

6.2 Az Euler-féle poliéderformula, síkgráfok karakterizációja

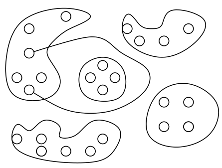
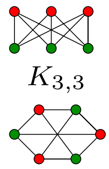
Tétel: Tetszőleges síkbarajzolt G gráf esetén $n + t = e + k + 1$.

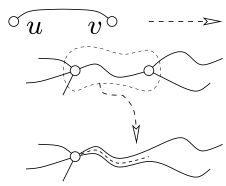
Biz: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben $t = 1$, $e = 0$ és $k = n$, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tfh már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzoljuk meg.

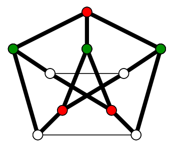
1. u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉlHaL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.



2. u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉlHaL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad. □





Köv: (1) Ha G SRható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól, azaz G minden síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.
(2) (**Euler-formula**) Ha G öf SRt gráf, akkor $n + t = e + 2$.
(3) Ha G egyszerű, SRható és $n \geq 3$, akkor $e \leq 3n - 6$.
(4) G egyszerű, SRható, C_3-mentes és $n \geq 3 \Rightarrow e \leq 2n - 4$.
(5) Ha G egyszerű, SRható, akkor $\delta(G) \leq 5$ (azaz $\exists v : d(v) \leq 5$).
(6) A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok egyike sem SRható.

Biz: (1): $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól.
(2): Mivel G öf, ezért a fenti Tételben $k = 1$.
(3): Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} \ell_i \geq 3t$. A Tétel alapján

$$3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k + 3 \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6 \ ,$$

amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik.
(4): Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} \ell_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt

$$2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$$

Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik.
(5): A KFL és (3) miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$.
(6): A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem SRható.

A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá (4), u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezért $K_{3,3}$ nem SRható. □

Megj: Könnyen látható, hogy ha G SRható, akkor $G + e$ tóruszra rajzolható bármely e él behúzása esetén. Nem nehéz látni, hogy K_6 is tóruszra rajzolható. Sőt: még K_7 is az, de K_8 már nem.

Def: **Élfelosztás**: az él egy új, másodfokú csúccsal történő felosztása.
Élösszehúzás: az él törlése és két végpontjának azonosítása.
Topologikus $K_{3,3}/K_5$: $K_{3,3}/K_5$-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf SRható tulajdonságát.

Biz: Az éltörlés és csúcstörlés esetén ez világos: radír felhasználásával kapható a G lerajzolásából. Az élfelosztás során is csak egy csúcsot kell az élnek megfelelő görbén felvenni, a síkbarajzolt tulajdonság ettől megmarad. Az élösszehúzás kicsit ravasz. Az 0 vastagsággal lerajzolt $e = uv$ élt egy pozitív szélességű sávvá hízlalhatjuk úgy, hogy a lerajzolás egyetlen éle sem metsz bele ebbe a sávba. A v-be csatlakozó éleket ezen a sávon belül tovább lehet vezetni u-ig, aminek az eredménye az lesz, hogy G síkbarajzolásából az e él összehúzásával kapott gráf síkbarajzolását konstruáljuk meg. □

Köv: (1) Topologikus K_5, topologikus $K_{3,3}$ gráf nem lehet síkbarajzolható.
(2) Ha G SRható, akkor G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja.

Biz: (1): Ha $K_{3,3}$ vagy K_5 topologikus változata síkbarajzolható volna, akkor $K_{3,3}$ vagy K_5 szintén síkbarajzolató lenne.
(2): Ha G síkbarajzolható, akkor G minden részgráfja is síkbarajzolható, ezért (1) miatt a topologikus $K_{3,3}$ és a topologikus K_5 egyaránt tiltott részgráfok a síkbarajzolható gráfok körében. □

Kuratowski tétele: (G SRható) $\Longleftrightarrow$ (G-nek nincs se topologikus K_5, se topologikus $K_{3,3}$ részgráfja)

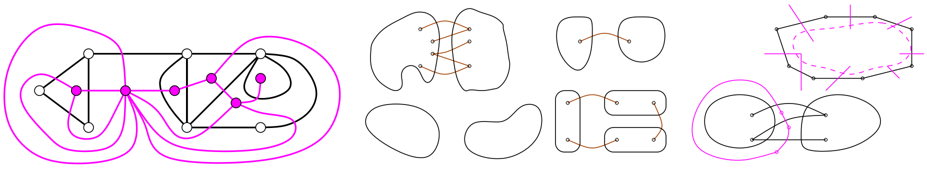
Példa: A fenti ábra jobb oldalán látható Petersen-gráfról világos, hogy nem síkbarajzolható: ha ugyanis az lenne, akkor a sugárirányú élek összehúzása után kapott K_5 is síkbarajzolható maradna. Tehát élösszehúzások és a K_5 segítségével indokolható, hogy a Petersen-gráf nem síkgráf.

Ezért a Kuratowski-tétel miatt a Petersen-gráfnak tartalmaznia kell egy tiltott részgráfot, azaz egy topologikus $K_{3,3}$-at vagy egy topologikus K_5-öt. Az utóbbi eset nem lehetséges, hiszen ahhoz az lenne szükséges, hogy a Petersen-gráfnak legalább 5 olyan csúcsa legyen, aminek a fokszáma legalább 4. Mivel láttuk, hogy a Petersen-gráf nem síkbarajzolható, a Kuratowski-tétel miatt topologikus $K_{3,3}$-at kell tartalmaznia. Egy ilyen látható az ábrán.

(Ebben az esetben a síkbarajzolhatóság Kuratowski-tételre alapozott cáfolata többet mond: az is kiderül belőle, hogy a Petersen-gráfból a két vízszintes élt elhagyva sem kapunk síkbarajzolható gráfot.)

6.3 Síkgráfok duálisa

Def: A G SRt gráf **duálisa** a G^* gráf, ha G^* csúcsai G tartományainak, G^* élei G éleinek felelnek meg. Az $uv \in E(G)$ élnek megfelelő duális él az uv él altal határolt két tartománynak megfelelő duális csúcsokat köti össze.



Megf: (1) A SRt G gráf G^* duálisa SRható. (n^*, e^*, t^*, k^*)
(2) $n^* = t$, $e^* = e$, $k^* = 1$.
(3) Ha v az i-dik laphoz tartozó duális csúcs, akkor $d_{G^*}(v) = \ell_i$.

Köv: A KFL-t a duálisra alkalmazva $\sum_{i=1}^{t} \ell_i = \sum_{v \in V(G^*)} d_{G^*}(v) = 2e^* = 2e$ adódik, ami épp a DKFL.

Def: A $Q \subseteq E(G)$ élhalmaz a G gráf **vágása**, ha $G - Q$ szétesik (több komponense van, mint G-nek), de $Q' \subsetneq Q$ esetén $G - Q'$ nem esik szét.

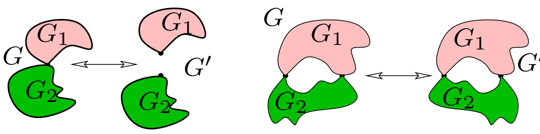
Elvágó él: egyélű vágás. **Soros élek**: kétélű vágás.

Kör-vágás dualitás: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor
(C a G köre) $\iff$ (C^* a G^* vágása) ill.
(Q a G vágása) $\iff$ (Q^* a G^* köre) .

Köv: Hurokél duálisa elvágó él, soros élpáré párhuzamos élpár.

6.4 Whitney tételei

Whitney tétele: Tfh G^* a G SRt gráf duálisa. Ekkor H pontosan akkor duálisa a G egy alkalmas síkbarajzolásának, ha H előáll G^*-ból a fenti Whitney-operációk alkalmas egymásutánjával.



Def: A $\varphi : E(G) \to E(H)$ kölcs. egyért. lekép. **kör-vágás dualitás** G és H között, ha C pontosan akkor G köre, ha $\varphi(C)$ H vágása.

Whitney másik tétele: Tfh G és H között kör-vágás dualitás van. Ekkor G SRható, és H a G egy alkalmas síkbarajzolásának duálisa.

Megj: Egy G gráf által leírt villamos hálózat viselkedését az Ohm- él Kirchhoff-törvények írják le. Ezek a G gráf éleire, köreire és vágásaira vonatkoznak. Ha G és H közt kör-vágás dualitás van, akkor H-n elkészíthető az előző hálózat duálisa. Az eredeti hálózat megoldásában ha az I és U értékeket felcseréljük, az utóbbi hálózat megoldását kapjuk. Whitney másik tétele miatt ez a különös szimmetria csak SRható gráfok által leírt hálózatokon lehetséges.

Mit tanultunk a síkgráfokról?

- Síkba és gömbre rajzolható gráfok kapcsolata
- DKFL, Euler-formula, soros bővítés, tiltott részgráfok
- SRható gráfok jellemzése tiltott részgráfokkal
- Síkgráfok duálisa, vágás, elvágó él, soros élek, kör-vágás dualitás
- SRható gráf duálisainak kapcsolata

II. rész

A lineáris algebra alapjai

7. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

Def:
Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans.
Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet.
Megoldás: Olyan értékadás, ami minden egyenletet igazzá tesz.

Példa:

$$\begin{aligned} 3x - 4z &= 666 \\ 33x - y + 77z &= 42 \\ \pi^{e^\pi} y - (\ln(\cos 42)) \cdot z &= \sqrt[\sqrt[\sqrt[\pi]{4}]{2}]{42} \end{aligned}$$

Cél: Lineáris egyenletrendszer összes megoldásának megtalálása.

Naiv módszer: Minden fázisban egy egyenletből kifejezünk egy ismeretlent, és ezt a többi egyenletbe behelyettesítjük. Az így kapott egyenletekkel végezzük a következő fázist. Minden fázisban 1-gyel csökken az ismeretlenek és az egyenletek száma is.

A megoldás formája: Az eljárás végére vagy elfogynak az egyenletek vagy a kapott egyenletek nem tartalmaznak ismeretlent. Utóbbi esetben a kapott (ismeretlent nem tartalmazó) egyenletek mindegyike vagy azonosság, vagy ellentmondás.

Ha van köztük ellentmondás, akkor nincs megoldás.

Ha mind azonosság, akkor a ki nem fejezett ismeretlenek bármely értékadása egyértelműen meghatározza a kifejezett ismeretlenek értékét.

Példa: 1. Az eljárás végére elfogynak az egyenletek.

$$\begin{array}{llll} x - 2y = 7 & \boxed{x} = 7+2y & \boxed{x} = 7 + 2y & \boxed{x} = 7 + 2y \\ 3x + y = 11 & 21 + 6y + y = 11 & 7y = -10 & \boxed{y} = -\frac{10}{7} \\ 2x + 3y = 5 & 14 + 4y + 3y = 5 & 7y = -9 & 7 \cdot \frac{-10}{7} = -9 \quad \lightning \end{array}$$

2. Az eljárás végén ellentmondás adódik.

$$\begin{array}{ccccc} x-2y=7 & \boxed{x}=7{+}2y & \boxed{x}=7+2y & \boxed{x}=7+2y & x=\frac{29}{7} \\ 3x+y=11 & 21+6y+y=11 & 7y=-10 & \boxed{y}=-\frac{10}{7} & \\ 2x+3y=4 & 14+4y+3y=4 & 7y=-10 & 7\cdot\frac{-10}{7}=-10\ \checkmark & y=-\frac{10}{7} \end{array}$$

3. Az eljárás végére csupa azonosságok maradnak.

$$\begin{array}{cccc} x-2y=7 & \boxed{x}=7{+}2y & \boxed{x}=7+2y & \\ 3x-6y=21 & 21+6y-6y=21 & 21=21\ \checkmark & x=7+2y \\ -2x+4y=-14 & -14-4y+4y=-14 & -14=-14\ \checkmark & y\in\mathbb{R} \end{array}$$

A továbbiakban a megoldás egy áttekinthetőbb módszerét és az ahhoz kapcsolódó terminológiát mutatjuk be.

7.1 Elemi sorekvivalens átalakítások

Def: Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenleteknek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

Példa:

$$\begin{array}{l} x_1-3x_3+5x_4=-6 \\ 7x_1+2x_2+3x_3=9 \\ x_2+7x_3-2x_4=11 \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 11 \end{array}\right) \end{array}$$

Megj: A kibővített együtthatómátrix a lineáris egyenletrendszer felírásának egy tömör módja: elkerüljük vele a műveleti- és egyenlőségjelekkel piszmogást, mégis teljesen áttekinthető módon tartalmaz minden lényeges információt.

Megoldás módszere: Ekvivalens átalakításokat végzünk, amelyek során a megoldások halmaza nem változik. Konkrétan:
(1) egyenleteket felcserélünk,
(2) egyenletet nemnulla konstanssal végigszorzunk ill.
(3) az i-dik egyenletet kicseréljük az i-dik és j-dik egyenletek összegére.
Erről szól a következő definíció.

Def:
A kibővített együtthatómátrix **elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ)**:
(1) sorcsere,
(2) sor nemnulla konstanssal végigszorzása,
(3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordinátánkénti) összegével

Megj: Nem elemi, de sorekvivalens átalakítás ha az i-dik sort helyettesítjük az i-dik sor és a j-dik sor konstansszorosának összegével, ill. ha egy csupa0 sort hozzáadunk vagy elhagyunk a kibővített együtthatómátrixból.

Állítás: ESÁ nyomán sosem változik meg a megoldások halmaza.

Biz: Minden ESÁ előtti megoldás megoldás marad az ESÁ után is. Minden ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. (A (3) típusú átalakítás visszaalakításához 3 ESÁ-ra van szükség.) Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti előtti rendszert is. □

Cél: Tetszőleges lineáris egyenletrendszerből kiindulva, ESÁ-okkal elérni, hogy a kapott rendszerből a megoldások könnyen kiolvashatók legyenek.

Először azt a kibővített együtthatómátrix-tulajdonságot határozzuk meg, amit elérve minden megoldás könnyen kiolvashatóvá válik.

7.2 (Redukált) lépcsős alak

Def: Az M mátrix **lépcsős alakú** (**LA**), ha
(1) minden sor első nemnulla eleme 1-es (ú.n. **vezér1-es**, avagy **v1**)
(2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1.
Az M mátrix **redukált lépcsős alakú** (**RLA**), ha
(3) M LA és (4) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

Példa: LA mátrix RLA mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RLA kibővített egyhómx esetén a megoldások könnyen kiolvashatók:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \end{aligned} \mapsto \begin{aligned} & x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_1 &= 1 - 3x_2 + 2x_4 \\ x_3 &= 7 - 5x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \mapsto \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_4 &= 1 \\ x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \mapsto \lightning$$

Def: Kib. egyhómx **tilos sora**: $0 \ \dots \ 0 \mid x$ alakú sor, ha $x \neq 0$, azaz olyan sor, amiben minden együttható 0, de a kibővítő elem nemnulla.

Def: A RLA kib. egyhómx v1-hez tartozó változója **kötött**, a többi változó (amihez nem tartozik v1) **szabad** (vagy **szabad paraméter**).

Megf: Ha a kib. egyhómx RLA, akkor (1) minden sor vagy a v1-hez tartozó változó értékadása, vagy tilos sor, vagy csupa0 sor.
(2) Ha van tilos sor, akkor nincs megoldás.
(3) Ha nincs tilos sor, a szabad paraméterek tetsz. értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

Megf: A lin. egyenletrsz. megoldása azt jelenti, hogy a lin. egyenletrsz. egy RLA kibővített egyhómx-szal van megadva.

Új cél: Olyan eljárás, ami tetsz. mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakít.

7.3 A Gauss-elimináció

Megadunk egy eljárást, ami el ugyan nem éri a kívánt célt, de közelebb visz hozzá.

Gauss-elimináció: Input: $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix.
Output: Egy M-ből ESÁ-okkal kapható $M' \in \mathbb{R}^{n\times k}$ LA mátrix.

Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemulla elemet az $(i-1)$-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban.
(a) Ha nincs ilyen elem (mert elfogytak a sorok, vagy mert az i-edik sortól kezdődően csak 0-k állnak a mátrixban), akkor az algoritmus véget ér.
(b) Ha van, sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorba visszük.
Az i-dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk.
Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázzuk a kapott v1 alatti elemeket.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 0&0&-1&3&5\\ 3&6&-6&0&9\\ 2&4&0&1&-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3&6&-6&0&9\\ 0&0&-1&3&5\\ 2&4&0&1&-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&-1&3&5\\ 2&4&0&1&-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&-1&3&5\\ 0&0&4&1&-7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&-3&-5\\ 0&0&4&1&-7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&-3&-5\\ 0&0&0&13&13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&-3&-5\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Megf: A Gauss-elimináció outputja LA. Az RLA eléréséhez további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&-3&-5\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&0&-2\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&2&0&0&-1\\ 0&0&1&0&-2\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix} \checkmark$$

7.4 A Gauss-elimináció további tulajdonságai

Megf: (1) A Gauss-elimináció outputja LA mátrix. Az RLA-hoz további lépésekre van szükség: minden v1 felett kinullázhatók az elemek, ha a v1 sorának konstansszorosait a v1 feletti sorokhoz adjuk.

Példa:

$$\begin{matrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&-3&-5\\ 0&0&0&1&1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1&2&-2&0&3\\ 0&0&1&0&-2\\ 0&0&0&1&1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1&2&0&0&-1\\ 0&0&1&0&-2\\ 0&0&0&1&1 \end{matrix} \checkmark$$

Megf: A Gauss-elimináció olyan eljárás, ami garantáltan működik, bár néha sokat kell számolni. A LA vagy RLA eléréséhez nem muszáj a Gauss-eliminációt követni: dolgozhatunk ügyes ESÁ-okkal.

Példa: Mechanikus Gauss-elimináció vs agysejtkímélő eljárás

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\boxed{\mathrm{I}} \mapsto \boxed{\mathrm{I}}/13} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} \\ 0 & \frac{9}{13} & -\frac{53}{13} & \frac{21}{13} \end{pmatrix}}_{\boxed{\mathrm{II}} \mapsto \boxed{\mathrm{II}} - 2\cdot \boxed{\mathrm{I}}}$$ Yeah.

A törtekkel történő fárasztó számolás elkerülhető ügyesen választott ESÁ-sal:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 25 & -10 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\boxed{\mathrm{I}} \mapsto \boxed{\mathrm{I}} - 6\cdot \boxed{\mathrm{II}}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 18 & -10 \\ 0 & 9 & -53 & 21 \end{pmatrix}}_{\boxed{\mathrm{II}} \mapsto \boxed{\mathrm{II}} - 2\cdot \boxed{\mathrm{I}}}$$ ✓

Megf: A Gauss-elimináció megvalósítható rekurzív algoritmusként is.
A GE(M) (az M mátrixot lépcsős alakra hozó eljárás):

$\boxed{\textbf{1.}}$ Ha M első oszlopa csupa0, akkor M' az első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Ha M első oszlopa tartalmaz nemnulla elemet, sorcserével és az első sor konstanssal szorzásával az első sor első elemét v1-sé tesszük, majd a v1 alatti elemeket ESÁ-okkal kinullázzuk. Legyen M' az első sor és első oszlop törlésével keletkező mátrix. Output: GE(M') elé írunk egy csupa0 oszlopot és az így kapott mátrix fölé a korábban törölt első sort.

„Lépésszámanalízis”: Az $M \in R^{n\times k}$ Gauss-eliminációja során minden fázisában legfeljebb egy sorcserét, legfeljebb $2n$ sorszorzást és legfeljebb n sorösszeadást hajtunk végre. Ezért minden fázis legfeljebb $konst \cdot nk$ lépést igényel, az összlépésszám legfeljebb $konst \cdot n^2k$. Mivel az input M mátrix $n \cdot k$ elemet tartalmaz, az eljárás hatékony.

7.5 Lineáris egyenletrendszerek megoldásszáma

Láttuk:

1. Lineáris egyenletrendszer kib. egyhómxként is megadható.
2. ESÁ nem változtat a megoldásokon.
3. ESÁ-okkal elérhető a RLA.
4. A RLA-ból azonnal adódik a megoldás.
   - Ha az utolsó oszlopban van v1, akkor nincs megoldás.
   - Ha az utolsó kivételével minden oszlopban van v1, akkor egyetlen megoldás van.
   - Ha az utolsón kívül más oszlopban sincs v1, akkor van szabad paraméter, így végtelen sok különböző megoldás van.

Köv: Ha a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor legalább annyi egyenlet van, mint ahány ismeretlen.

Biz: Az RLA-ra hozás után nincs szabad paraméter, tehát minden változóhoz tartozik v1. Ezért a kibővített együtthatómátrixnak legalább annyi sora van, mint a változók száma. □

Megj: A fenti következmény fordított irányban nem igaz, és lényegében nincs más összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az ismeretlenek száma ill. az egyenletek száma között.

Mit tanultunk lineáris egyenletrendszerekről?

- Lineáris egyenletrendszerek naiv megoldása
- Kibővített együtthatómátrix, ESÁ
- (Redukált) lépcsős alak, és kapcsolata a megoldásokkal
- Tilos sor, szabad paraméter, kötött változó
- Gauss-elimináció a LA eléréséhez, RLA képzése
- Ismeretlenek, egyenletek és megoldások számának kapcsolata

8. fejezet

Az $\mathbb{R}^n$ tér alaptulajdonságai

8.1 Az $\mathbb{R}^n$ tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza. Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall i\}$ a rendezett n-esek halmaza. Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj: (1) A továbbiakban $\mathbb{R}^n$ elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.
(2) Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor $\mathbb{R}^n$ elemeit vektoroknak, $\mathbb{R}$ elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.
(3) A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok”, hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak. Az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de a mi tárgyalásunkban egy „vektor” általában nem irányított szakasz.

Konvenció: A jelölés során az oszlopvektorokat aláhúzással különböztetjük meg a skalároktól.

Példa:
$\begin{pmatrix} e \\ \pi \\ 42 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\underline{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, utóbbi esetben az 1-es felülről az i-edik helyen áll.

Megj: (1) Az n magasságú vektorokkal különféle dolgokat művelhetünk. Például (koordinátánként) összeadhatjuk őket. Vagy skalárral szorozhatjuk őket. (Ami nem „igazi” művelet, mert egy „igazi” művelet esetén egyazon halmaz két elemét „műveljük össze”, míg itt egy skalárt szorzunk vektorral.)
(2) $\mathbb{R}^n$ **tér** alatt $\mathbb{R}^n$ elemire és a két fenti műveletre gondolunk.

Példa:

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, akkor $\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Ha $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Megj: $\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ elemei természetes módon megfeleltethetők a sík, ill. a 3 dimenziós tér pontjainak. Ez segíthet abban, hogy valamiféle szemléletes képet kapjunk az n magasságú vektorokról tanultakról.

8.2 Vektorműveletek azonosságai

Állítás: Az $\mathbb{R}^n$ tér vektoraival történő számolásban néhány fontos szabály sokat segít. Tetsz. $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra az alábbiak teljesülnek

(1) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (az összeadás kommutatív)
(2) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (az összeadás asszociatív)
(3) $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ (egyik disztributivitás)
(4) $(\lambda + \mu)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{u}$ (másik disztributivitás)
(5) $(\lambda\mu)\underline{u} = \lambda(\mu\underline{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Biz: Mivel mindkét művelet koordinátánként történik, elég az egyes azonosságokat koordinátánként ellenőrizni. Ezek viszont éppen a valós számokra (azaz a skalárokra) vonatkozó, jól ismert szabályok. $\square$

Konvenció: $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $-\underline{v} := (-1) \cdot v$.

Megj: Vektorok között nem csak az összeadás, hanem a kivonás is értelmezhető: $\underline{u} - \underline{v} := \underline{u} + (-1)\underline{v}$. Ezáltal a kivonás is egyfajta összeadás, tehát az összadásra vonatkozó szabályok értelemszerű változatai a kivonásra is érvényesek.

A vektorokkal történő számoláskor érvényes szabályok nagyon hasonlók a valós számok esetén megszokott szabályokhoz.

8.3 Altér és lineáris kombináció

Def: $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}^n$ tér **altere** (jel: $\mathbf{V} \leq \mathbb{R}^\mathbf{n}$), ha V zárt a műveletekre: $\underline{x} + \underline{y}, \lambda\underline{x} \in V$ teljesül $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben tetsz. origón áthaladó egyenes pontjaihoz tartozó vektorok alteret alkotnak. $\mathbb{R}^3$-ban tetsz. origón áthaladó sík vagy egyenes pontjainak megfelelő vektorok alteret alkotnak.

Kérdés: Mik az $\mathbb{R}^n$ tér alterei, és hogyan lehet ezeket megkapni?

Megf: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \underline{x}_k \in V$.

Def: A $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ kifejezés az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ **lineáris kombinációja**.
Triviális lineáris kombináció: $0 \cdot \underline{x}_1 + \ldots + 0 \cdot \underline{x}_k$.

Megf: $(V \leq \mathbb{R}^n) \iff (V$ zárt a lineáris kombinációra), azaz az altér def.ható az $\mathbb{R}^n$ lineáris kombinációra zárt részhalmazaként.

Biz: $\Rightarrow$: $\lambda_i \underline{x}_i \in V$ $\forall i$ esetén, így a $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i$ összegük is V-beli.
$\Leftarrow$: Ha $\underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ ill. $\lambda \underline{x}$ lineáris kombinációk. Mivel V zárt a lináris kombinációra, ezért $\underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V$. Ez tetszőleges $\underline{x}, \underline{y}, \lambda$ esetén fennáll, tehát V zárt a műveletekre, vagyis altér. $\square$

Megj: Ha egy V-ről igazolni akarjuk, hogy altér, akkor elég a műveletzártságot ellenőrizni. Ha azonban V-ről tudjuk, hogy altér, akkor a Megf miatt az erősebb (lineáris kombinációra zárt) tulajdonságát is használhatjuk.

Def: $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Példa:
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ az origón átmenő 2-meredekségű egyenes.
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$, ill. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$ ahol $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i$.

Konvenció: $\langle \emptyset \rangle := \{\underline{0}\}$.

Állítás: Tetsz. $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$.

Biz: Zárt az összeadásra: $(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k) + (\kappa_1 \underline{x}_1 + \ldots + \kappa_k \underline{x}_k) = (\lambda_1 + \kappa_1)\underline{x}_1 + \ldots + (\lambda_k + \kappa_k)\underline{x}_k \in V$. Skalárral szorzás: $\lambda \cdot (\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k) = \lambda\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda\lambda_k \underline{x}_k \in V$. $\square$

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ által **generált altér** az $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle$ halmaz.
Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

Megf: (1) Alterek metszete altér: $V_i \leq \mathbb{R}^n$ $\forall i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq \mathbb{R}^n$.
(2) $\{\underline{0}\} \leq \mathbb{R}^n$. (3) $\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$.

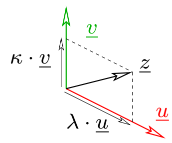
Biz: (1): Műveletzártság: $\underline{x}, \underline{y} \in V_i$ $\forall i, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} \in V_i$ $\forall i$. ✓
(2): $\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ ill. $\lambda \underline{0} = \underline{0}$, zárt a műveletekre. ✓
(3): $\mathbb{R}^n$ zárt a műveletekre. ✓ $\square$

Def: $\mathbb{R}^n$ **triviális alterei**: $\{\underline{0}\}, \mathbb{R}^n$.

8.4 Lineáris függetlenség és generálás

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér **generátorrendszerét** alkotják, ha $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle = V$.

Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere, hisz minden $\mathbb{R}^n$-beli vektor előáll az egységvektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \rangle = \mathbb{R}^n$.



Ha $\mathbb{R}^2$-ben ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ nem párhuzamosak, akkor $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ generátorrendszer, hisz bármely $\underline{z}$ vektor előállítható $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineáris kombinációjaként. (Ehhez $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyenesére kell a „másik" vektorral párhuzamosan vetíteni az előállítandó $\underline{z}$ vektort.)

Hasonlóan, ha $\mathbb{R}^3$-ban három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor generátorrendszert alkot.

Def: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ha a fenti vektorok nem lin. ftn-ek, akkor **lineárisan összefüggők**.

Példa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin. ftn $\mathbb{R}^n$-ben, hisz ha $\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$ akkor az i-edik koordináta 0 volta miatt $\lambda_i = 0$. Ez minden i-re igaz, tehát a fenti lineáris kombináció triviális.

$\mathbb{R}^2$-ben két vektor akkor lin.öf, ha párhuzamosak. Tehát ha nem párhuzamosak, akkor lin. ftn-ek. ($\underline{0}$ minden vektorral párhuzamos.)

$\mathbb{R}^3$-ban pedig az igaz, hogy ha három vektor nem esik ugyanarra az origón átmenő síkra, akkor ez a három vektor lineárisan független rendszert alkot.

Megj: A lin.ftn-ség (akárcsak a lin.öf tulajdonság) vektorok egy halmazára és nem az egyes vektorokra vonatkozik. Hasonló igaz a generátorrendszerre. Az, hogy egy konrét $\underline{v}$ vektor benne van egy lin.ftn (vagy lin.öf vagy generátor-) rendszerben lényegében semmi információt nem ad $\underline{v}$-ről.

Lemma: Az $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ vektorrendszer lineárisan független $\iff$ egyik $\underline{x}_i$ sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

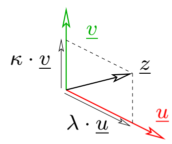
Biz: A fenti állítások tagadásainak ekvivalenciáját igazoljuk.

1. Tfh $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ **nem** lineárisan független, azaz $\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0}$ és $\lambda_i \neq 0$. Ekkor $\underline{x}_i$ előállítható a többiből:
$\underline{x}_i = \frac{-1}{\lambda_i} \cdot \left(\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k\right)$.

2. Most tfh valamelyik x_i előáll a többi lineáris kombinációjaként: $\underline{x}_i = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. Ekkor $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\}$ nem lineárisan független, hiszen a nullvektor megkapható nemtriviális lineáris kombinációként: $\underline{0} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_{i-1} \underline{x}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{x}_i + \lambda_{i+1} \underline{x}_{i+1} + \ldots \lambda_k \underline{x}_k$. □

Megf: (1) A $\{\underline{0}\}$ nem lineárisan független: $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$.

(2) Két nemnulla vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.



(3) $\mathbb{R}^2$-ben két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha (irányított szakaszként) nem párhuzamosak. Bármely két nem párhuzamos $\mathbb{R}^2$-beli vektor generálja $\mathbb{R}^2$-t.

(4) Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V-n belül) hízlalva generátorrendszer marad.

(5) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

8.5 Független- és generáló halmazok

Állítás: Tfh $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \notin G$ és $\langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle = V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $(\langle G\rangle = V) \iff (\underline{v} \in \langle G\rangle)$

Megj: A fenti állítás tkp azt mondja ki, hogy egy V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is a V altér generátorrendszerét alkossák, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Biz: $\Rightarrow$: Ekkor $\langle G\rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle$, ezért $\underline{v} \in V = \langle G\rangle$.

$\Leftarrow$: Tetsz. $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G\rangle$. Mivel $\underline{v} \in \langle G\rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{\underline{g}\in G} \lambda_{\underline{g}}\underline{g}$. Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\}\rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda\underline{v} + \sum_{\underline{g}\in G} \mu_{\underline{g}}\underline{g}$. Ebbe $\underline{v}$ helyére behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{\underline{g}\in G}(\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}})\underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G\rangle$. Ez bármely $\underline{u} \in V$-re elmondható, így $\langle G\rangle = V$. $\square$

Lemma: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn és $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $(F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn.$) \iff (\underline{f} \notin \langle F\rangle)$

Megj: (1) A lemma szerint ftn halmaz hízlalása csakis olyan vektorral lehetséges, ami nem áll elő a ftn rendszer elemei lin.komb-jaként.
(2) A $\Leftarrow$ irányt az „újonnan érkező vektor lemmájának” is nevezik.

Biz: $\Rightarrow$: Ha $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn., akkor $\underline{f}$ nem áll elő F-beliek lin.komb.-jaként, azaz $\underline{f} \notin \langle F\rangle$.

$\Leftarrow$: Thf $\underline{f} \notin \langle F\rangle$ és $\lambda\underline{f} + \lambda_1\underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{f}_k = \underline{0}$. Azt kell belátnunk, hogy $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ha $\lambda = 0$, akkor a BO az $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k$ vektorok lin.kombinációja, így F lin.ftnsége miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ Tehát $\underline{0}$ csak triviális lineáris kombinációként áll elő, vagyis $F \cup \{\underline{f}\}$ csakugyan lin.ftn.

Ha pedig $\lambda \neq 0$, akkor $\underline{f}$ kifejezhető az F-beliekkel: $\underline{f} = \frac{-\lambda_1}{\lambda}\underline{f}_1 + \ldots + \frac{-\lambda_k}{\lambda}\underline{f}_k$, azaz $f \in \langle F\rangle$. Ez ellentmond az $\underline{f} \notin \langle F\rangle$ feltevésnek. $\square$

Köv: (**Kicserélési lemma**) Ha $F \subseteq V \leq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\langle G\rangle = V$ gen.rsz. akkor $\forall\ \underline{f} \in F\ \exists\ \underline{g} \in G$, amire $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lin.ftn.

Megj: A kicserélési lemma szerint bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható V generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Biz: Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Indirekt bizonyítunk.

Tfh $F' \cup \{\underline{g}\}$ egyetlen $\underline{g} \in G$-re sem lin. ftn. Ekkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F'\rangle$ teljesül minden $\underline{g} \in G$-re. Ezért $G \subseteq \langle F'\rangle$, ahonnan $\langle G\rangle \subseteq \langle F'\rangle$ következik. Ebből pedig $\underline{f} \in V = \langle G\rangle \subseteq \langle F'\rangle$, azaz $\underline{f} \in \langle F'\rangle$ adódik. A fenti lemma miatt $\{\underline{f}\} \cup F' = F$ nem lin. ftn, ami ellentmondás.

Az indirekt feltevés hamis, így $\exists\ \underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. $\square$

FG-egyenlőtlenség: Tfh G a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszere, és $F \subseteq V$ lin.ftn. Ekkor $|F| \leq |G|$.

Megj: Magyarul: altérben egy ftn. rendszer mérete nem lehet nagyobb egy generátorrendszer méreténél.

Biz: Legyen $F_0 := F$. Ha $F_0 \subseteq G$, akkor $|F_0| \leq |G|$. Ha $F_0 \not\subseteq G$, akkor $F_0 \setminus G \neq \emptyset$, legyen mondjuk $\underline{f} \in F_0 \setminus G$. A kicserélési lemma miatt van olyan $\underline{g} \in G$, amire $F_1 := F_0 \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. Ezzel az F_1-gyel ugyanezt folytatva kapjuk az F_2, $F_3, \ldots$, lin.ftn rendszereket. Előbb-utóbb olyan F_i-hez jutunk, amivel ez már nem folytatható, mert $F_i \subseteq G$. Ekkor $|F_0| = |F_1| = \ldots = |F_i| \leq |G|$, győztünk. □

Köv: Ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn, akkor $|F| \leq n$.

Biz: Láttuk, hogy $G = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ generátorrendszere. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq |G| = n$. □

Állítás: Tfh $F = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin.ftn. és $\underline{f} \in \langle F \rangle$. Ekkor $\underline{f}$ egyértelműen áll elő F-beli vektorok lin.komb.-jaként.

Biz: Mivel $f \in \langle F \rangle$, ezért $\underline{f}$ előáll az F-beliek lin.komb.-jaként. Tfh $\underline{f} = \lambda_1 \underline{f}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{f}_k = \mu_1 \underline{f}_1 + \ldots + \mu_k \underline{f}_k$ két előállítás. Ekkor $\underline{0} = \underline{f} - \underline{f} = (\lambda_1 - \mu_1)\underline{f}_1 + \ldots + (\lambda_k - \mu_k)\underline{f}_k$.

Mivel F lin.ftn, a JO-on álló lineáris kombináció triviális, azaz $\lambda_i = \mu_i$ $\forall i$. Így a két fenti előállítás megegyezik, vagyis f csak egyféleképp áll elő az F-beliek lin.komb-jaként. □

8.6 Generált vektorok számítása

Hogyan lehet eldönteni egy $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorról, hogy benne van-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérben?

Azt kell megállapítani, hogy $\underline{u}$ előáll-e $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k$ alakban alkalmas $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárokkal.

A válasz egy lineáris egyenletrendszer megoldásából adódik.

Példa: Benne van-e az $\underline{u}$ vektor $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$ altérben, ahol $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárok, amire $\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3$ teljesül.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg: $\begin{array}{r} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 6 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 6 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 2 \end{array}$

Az egyenletrendszert a tanult módon, a kibővített együtthatómátrix RLA-ra hozásával oldjuk meg.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy $\underline{u} = -4\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 - \underline{v}_3$, tehát $\underline{u} \in V$, vagyis az $\underline{u}$ vektort generálják a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorok.

Ha nem lett volna megoldása a fenti egyenletrendszernek, akkor $\underline{u}$ nem lett volna benne a generált altérben.

8.7 Generált altér megadása

A következő célunk az, hogy egy generátorrendszer segítségével megadott V altér vektorait jellemezzük. Ehhez felhasználjuk az imént látott módszert, aminek a segítségével egy konkrét $\underline{u}$ vektorról eldöntöttük, hogy V-hez tartozik-e. Most nem egy konkrét vektor esetén, hanem egy „általános” $\underline{x}$ vektorra fogjuk megvizsgálni, mi is az altérhez tartozás feltétele. Láttuk, hogy egy konkrét $\underline{u}$ vektor akkor volt V-beli, ha egy lineáris egyenletrendszernek volt megoldása. Ugyanezt tesszük most is, azzal a különbséggel, hogy nem egy konkrét lineáris egyenletrendszert oldunk meg, hanem egy olyat, aminek a jobb oldalán, a konstansok helyén paraméterek állnak.

Példa: Állapítsuk meg, hogy mely $\underline{x}$ vektorok tartoznak a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \rangle$ altérhez, ahol

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A $\lambda_1\underline{u} + \lambda_2\underline{v} + \lambda_3\underline{w} + \lambda_4\underline{z} = \underline{x}$ vektoregyenlet megoldhatóságát vizsgáljuk. Ez az alábbi, a koordinátákra felírt lineáris egyenletrendszer megoldhatóságával ekvivalens.

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_1 \\ -1\lambda_1 + 3\lambda_2 - 9\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_2 \\ 0\lambda_1 - 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= x_3 \\ \lambda_1 - 1\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 &= x_4 \end{aligned}$$

A kib. egyhómx-ot ESÁ-okkal RLA-ra hozzuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \end{array}\right) \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4}: \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & x_2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & x_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3}:$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & x_4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & x_2 + x_4 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & x_1 - 3x_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & x_4 - x_3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & x_1 + 5x_3 - 3x_4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2+2x_3+x_4}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3x_1-x_2+13x_3-10x_4}{3} \end{array}\right)$$

Ezért $\underline{x} \in V \iff$ a fenti egy.rsz. megoldható $\iff$ a LA-ban $\nexists$ tilos sor. A konkrét esetben $\underline{x} \in V \iff 3x_1 - x_2 + 13x_3 - 10x_4 = 0$ a keresett feltétel.
$\square$

Köv: Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy minden V altérhez tartozik egy (homogén) lineáris egyenletrendszer, ami jellemzi V vektorait.

8.8 Lineáris függetlenség eldöntése

Hogyan döntjük el $\mathbb{R}^n$-beli vektorok egy $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ halmazáról, hogy az elemei lineárisan függetlenek-e vagy sem? A korábban igazolt lemma szerint azt kell megállapítani, hogy előáll-e valamelyik $\underline{v}_i$ vektor a többi lineáris kombinációjaként, azaz (például $i = k$ esetén) vannak-e olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ skalárok, amikre $\underline{v}_k = \lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\underline{v}_{k-1}$. Ezt egy lineáris egyenletrendszer megoldásával lehet eldönteni. (Valójában elég a megoldhatóság eldöntése.) Ha ezt a stratégiát követjük, akkor k db lineáris egyenletrendszerrel kell foglalkozni.

E helyett célszerűbb a lineáris függetlenség eredeti definíciójával dolgozni: azt kell eldönteni, hogy $\underline{0}$ előáll-e a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok **nemtriviális** lineáris kombinációjaként. Így csak egyetlen egyenletrendszerrel kell foglalkozni, és azt eldönteni, hogy van-e olyan megoldása, amiben nem minden ismeretlen értéke 0.

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, κ, μ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \kappa\underline{v} + \mu\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg: $\begin{matrix} 3\lambda + 2\mu + 0\kappa = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 3\kappa = 0 \\ 0\lambda + 2\mu + 9\kappa = 0 \end{matrix}$

Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és fürgén nekilátunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{1} : \boxed{1} - \boxed{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{2} : \boxed{2} - \boxed{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \kappa = 0 \\ \mu = 0 \end{matrix}$$

Azt kaptuk, hogy kizárólag a $\lambda = \kappa = \mu = 0$ a megoldás, tehát az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja ad $\underline{0}$-t.
Ezért a kérdezett vektorok lineárisan független halmazt alkotnak.

Nézzünk meg egy másik példát is!

Példa: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ vektorok vajon lineárisan függetlenek-e?

Megoldás: Ismét azt kell eldönteni, hogy vannak-e olyan λ, κ, μ skalárok, hogy van köztük 0-tól különböző, és $\lambda\underline{u} + \kappa\underline{v} + \mu\underline{w} = \underline{0}$.

Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletnek felel meg: $\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu + 0\kappa &= 0 \\ 1\lambda + 2\mu + 4\kappa &= 0 \\ 0\mu + 3\mu + 9\kappa &= 0 \end{aligned}$

Felírjuk a kib. egyhómx-ot, és ismét nekilátunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} \mu &\in \mathbb{R} \text{ tetsz.} \\ \lambda &= 2\mu \\ \kappa &= -3\mu \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy a μ szabad paraméter, így például a $\mu = 1$, $\lambda = 2$, $\kappa = -3$ választással $2\underline{u} - 3\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$ adódik.

Az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációja előállítja a $\underline{0}$-t, ezért a kérdezett vektorok nem lineárisan függetlenek.

8.9 Mit tanultunk az $\mathbb{R}^n$ térről?

- $\mathbb{R}^n$ oszlopvektorai a műveletekkel együtt alkotják az $\mathbb{R}^n$ teret.
- Altér: a műveletekre (avagy a lin.komb-ra) zárt részhalmaz.
- Véges sok vektor lin.komb-i alteret generálnak.
- Generátorrendszerek és lin.ftn-ség.
- Ftn részhalmaz ritkítható, generátorrendszer hízlalható.
- Ftn részhalmaz hízlalása, generátorrendszer ritkítása.
- Kicserélési lemma és FG-egyenlőtlenség.
- Lin.komb egyértelműsége lin.ftn rendszer esetén.
- Generált altérhez tartozás eldöntése.
- Generált altérhez tartozás jellemzése egyenletrendszerrel.
- Lineáris függetlenség eldöntése.

9. fejezet

Altér bázisa és dimenziója

9.1 Altér bázisa

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér **bázisa** a V egy lin.ftn generátorrendszere.

Példa: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok az $\mathbb{R}^n$ **standard bázisát** alkotják.

Kínzó kérdés: Minden altérnek van bázisa? Ha $\mathbb{R}^n$ egy V alterének van, akkor hogyan lehet előállítani V egy bázisát?

1. módszer: Ha ismert a V egy véges G generátorrendszere (azaz $V = \langle G \rangle$) akkor G-t addig ritkítjuk, míg lineárisan függetlenné válik: ha egy $\underline{g} \in G$ generátorelem előáll $G \setminus \{\underline{g}\}$ elemeinek alkalmas lineáris kombinációjaként, akkor $\underline{g}$ eldobható, hisz $\langle G \setminus \{\underline{g}\} \rangle = V$ is generálja V-t. Ha elfogynak az eldobható $\underline{g}$ vektorok, akkor G maradéka lineárisan független generátorrendszer.

2. módszer: Egy $F \subseteq V$ lin.ftn halmazt (pl. $F = \emptyset$-t) hízlalunk. Ha $\langle F \rangle = V$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor $\underline{f} \in V \setminus \langle F \rangle$-re $F \cup \{\underline{f}\}$ lin.ftn. Az FG-egyenlőtlenség miatt $|F| \leq n$, így legfeljebb n ilyen lépés után megkapjuk V egy bázisát.

Köv: Ha F ill. G lineárisan független halmaz ill. generátorrendszer a V altérben és $|F| = |G|$, akkor F és G is V bázisai.

Biz: A 2. módszer szerint F bázissá egészíthető ki, az 1. módszer miatt G tartalmaz bázist. Az FG-egyenlőtlenség miatt ez a két bázis csakis F ill. G lehet.

9.2 Bázis előállítása generátorrendszerből

Példa: Keressük meg a $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \rangle$ altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Generátorrendszert ritkítunk. A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{w} + \nu\underline{x} + \tau\underline{y} = \underline{0}$ egyenletet. Ez koordinátánként egy-egy lineáris egyenletet, összességében egy lineáris egyenletrendszert jelent, amit a szokásos módon oldunk meg.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \kappa \quad \nu \quad \tau \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \kappa, \nu \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = \kappa - 3\nu \\ \mu = 2\nu - \kappa \\ \tau = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Pl } \kappa = \nu = 1 \text{ esetén} \\ \lambda = -2, \mu = 1, \text{ és } \tau = 0. \end{array}$$

Ezért $-2\underline{u} + \underline{v} + \underline{w} + \underline{x} = \underline{0}$, azaz $\underline{w} = 2\underline{u} - \underline{v} - \underline{x}$, ezért $\underline{w}$ elhagyható a generátorrendszerből: $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{x}, \underline{y} \rangle$. Továbbritkítjuk a már megritkított generátorrendszert. Így a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg.

A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{x} + \nu\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa: $\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \kappa \quad \nu \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \kappa \in \mathbb{R} \text{ tetsz} \\ \lambda = -3\kappa \\ \mu = -2\kappa \\ \nu = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Pl } \kappa = 1 \text{ esetén} \\ \lambda = -3, \mu = 2, \text{ és } \nu = 0. \end{array}$$

Ezért $-3\underline{u} + 2\underline{v} + \underline{x} = \underline{0}$, azaz $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$, ezért $\underline{x}$ elhagyható a generátorrendszerből: $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{y} \rangle$. Még tovább próbáljuk ritkítani a már alaposan megritkított generátorrendszert, ezért a $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \kappa\underline{y} = \underline{0}$ vektoregyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. A koordinátánként kapott egyenletek alkotta rendszer kibővített együtthatómátrixa: $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \lambda \quad \mu \quad \kappa \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \quad \lambda = \mu = \kappa = 0$$

Az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}$ vektoroknak **csak** a triviális lineáris kombinációja állítja elő a $\underline{0}$-t, ezért az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}$ vektorok lineárisan függetlenek. Láttuk, hogy $V = \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{y} \rangle$, ezért $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V altér egy olyan bázisa, amit a generátorrendszer ritkításával kaptunk. $\square$

9.3 Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

Példa: Keressük meg az alábbi $V \leq \mathbb{R}^4$ altér egy bázisát!

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 3x_2 - 2x_4 = 0 \right\}$$

Megoldás: Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ből elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.}, \\ x_1 = -x_3 - \frac{5}{3}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4. \end{array}$$

A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan értékadásait keressük, amelyek lin.kombjaként a szp-ek tetsz. értékadása előáll. Például ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk, ilyet kapunk. Így az $x_3 = 1, x_4 = 0$ ill. $x_3 = 0, x_4 = 1$ értékadásokhoz a V altér

$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorokból álló bázisa tartozik. □

9.4 Altér dimenziója

Tétel: Ha B_1 és B_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ bázisai, akkor $|B_1| = |B_2|$.

Biz: Mivel B_1 lin.ftn és B_2 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_1| \leq |B_2|$.

Az is igaz, hogy B_2 lin.ftn és B_1 generátorrendszer V-ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt $|B_2| \leq |B_1|$ is teljesül.

A két eredmény összevetéséből $|B_1| = |B_2|$ adódik. □

Def: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér **dimenziója** $\dim V = k$, ha V-nek van k vektorból álló bázisa.

Megj: A fenti tétel szerint az altér dimenziója egyértelmű.

Példa: Az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziója n. (U.i. $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ lin.ftn gen.rsz.)

Állítás: Ha $U \leq V \leq \mathbb{R}^n$, akkor $\dim U \leq \dim V$.

Biz: Legyen B az U bázisa. Ekkor $B \subseteq V$ lin.ftn, ezért a korábban látott 2. módszerrel B-t ki lehet egészíteni V egy B' bázisává, így $\dim U = |B| \leq |B'| = \dim V$. □

Állítás: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és V_1, V_2 a V alterei, akkor $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq \dim V_1 + \dim V_2$.

Biz: Egészítsük ki az $U \cap V$ egy B bázisát a V_1 egy $B \cup B_1$ ill. a V_2 egy $B \cup B_2$ bázisává. Igazoljuk, hogy $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Tfh $\sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{0}$. Ezt átrendezve: $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 = -\sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 \in V_2$ adódik, ezért $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$. Ekkor $\underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, hisz B a $V_1 \cap V_2$ bázisa. Innen $\sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{x} - \underline{x} = \underline{0}$. A $B \cup B_2$ lin.ftn-sége miatt $\lambda_{\underline{b}_2} = 0 \ \forall \underline{b}_2 \in B_2$. Hasonlóan $\lambda_{\underline{b}_1} = 0 \ \forall \underline{b}_1 \in B_1$, és $\lambda_{\underline{b}} = 0 \ \forall \underline{b} \in B$, azaz $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Ebből adódik, hogy $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \geq |B| + |B_1| + |B_2| + |B| = \dim V_1 + \dim V_2$. □

Köv: $\mathbb{R}^3$-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.

Megj: $\mathbb{R}^4$-ben már található két olyan origón áthaladó sík, amik csak az origóban metszik egymást. Ilyenek pl. $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ ill. $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle$.

A továbbiakban azt fogjuk megmutatni, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges k dimenziós altere „lényegében" úgy viselkedik, mint $\mathbb{R}^k$.

9.5 Bázis szerinti koordináták

Legyen B a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa. Mivel B generátorrendszer, minden $\underline{v} \in V$ előáll a B elemeinek lin.komb-jaként, azaz $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b}$ alakban.

A B bázis lin.ftn-ségéből pedig az következik, hogy tetszőleges $\underline{v} \in V$ lin.komb-ként történő előállítása egyértelmű: ha $\underline{v} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, akkor $\lambda_{\underline{b}} = \mu_{\underline{b}} \ \forall \underline{b} \in B$.

Ez a gondolatmenet indokolja az alábbi fogalom jóldefiniáltságát.

Def: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisa és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$, akkor a $\underline{v}$ vektor ***B* bázis szerinti koordinátavektora** $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$

Az alábbi összefüggések azonnal adódnak a definícióból.

Állítás: Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ a V altér bázisa, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor (1) $[\underline{u} + \underline{v}]_B = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$ ill. (2) $[\lambda \underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B$.

Biz: (1): Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$.

Ekkor $\underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$ és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i$, tehát
$\underline{u} + \underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) \underline{b}_i$, ezért
$[\underline{u} + \underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu_k \end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$.

(2): Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\lambda \underline{u} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k \lambda \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_k \end{pmatrix} = \lambda [\underline{u}]_B$ □

Megj: A fenti állítás azt mutatja meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely V altere lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az $\mathbb{R}^k$ tér, ahol $k = \dim V$.

Kínzó kérdés: Hogy lehet a koordinátavektort kiszámítani?

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a $\lambda_1\underline{b}_1 + \lambda_2\underline{b}_2 = \underline{v}$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert. A kibővített együtthatómátrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 4 \end{array}$$

Ezek szerint $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2$, azaz $\underline{v} \in V$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\square$

9.6 RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága

Figyeljük meg egy RLA mátrix oszlopait!

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & & & & & & ? & & & & & \\ & & 1 & & & & \vdots & & & & & \\ & & & & 1 & & ? & & & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & & & & \vdots & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 & & & & & \end{array}\right)$$

Megf: Az M mátrix pontosan akkor RLA, ha úgy kapható az $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k$ oszlopok alkotta mátrixból oszlopok beszúrásával, hogy minden beszúrt oszlop a tőle balra álló $\underline{e}_i$ oszlopok lineáris kombinációja.

Biz: Tfh M RLA. Ekkor vezéregyesek oszlopai a standard bázis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ egységvektorai. Minden vezéregyest nem tartalmazó oszlop minden nemnulla elemétől balra van a nemnulla elem sorában vezéregyes. Ezen vezéregyesek oszlopainak alkalmas lineáris kombinációjaként előáll a vezéregyest nem tartalmazó oszlop. Az M mátrix tehát előállítható a megfigyelésben leírt módon.

Most tfh M az $(\underline{e}_1|\ldots|\underline{e}_k)$ mátrixból keletkezik a megfigyelésben leírt módon történő oszlopbeszúrásokkal. Ekkor a vezéregyesek pontosan az $\underline{e}_i$ vektorok egyesei lesznek. Ezért minden vezéregyes feletti sorban áll a vezéregyestől balra másik vezéregyes, és a vezéregyesek felett is csak 0-k állnak, tehát M RLA.

9.7 ESÁ-ok hatása a sor- és oszlopvektorokra

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot tekinthetünk n db $\mathbb{R}^k$-beli sorvektornak és k db $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektornak is. Most azt vizsgáljuk, hogyan hat egy ESÁ ezen sor- ill. oszlopvektorok rendszerére.

Állítás: Tfh M'-t ESÁ-okkal kaptuk az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból. Ha S ill. S' az M ill. M' sorvektorainak halmaza, akkor $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$.

Biz: Feltehető, hogy M'-t egyetlen ESÁ-sal kaptuk M-ből. Bármelyik konkrét ESÁ-t is alkalmaztuk, az újonnan megjelenő sor a korábbi sorok lineáris kombinációja, így benne van az $\langle S\rangle$ altérben. Ezért $S' \subseteq \langle S\rangle$, így $\langle S'\rangle \subseteq \langle S\rangle$. Láttuk, hogy bármely ESÁ megfordítása is kivitelezhető ESÁ-okkal, ezért $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$ is teljesül. E két megfigyelésből pedig $\langle S\rangle = \langle S'\rangle$ adódik. $\square$

Állítás: Tfh az $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixból M'-t ESÁ-okkal kaptuk és $O = \{\underline{o}_1, \dots \underline{o}_k\}$ ill. $O' = \{\underline{o}'_1, \dots \underline{o}'_k\}$ az oszlopvektoraik halmaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazok a lineáris összefüggések teljesülnek:

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}_i\right) \qquad \iff \qquad \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{o}'_i\right).$$

Biz: Ismét feltehető, hogy M' egyetlen ESÁ-sal keletkezett. Ráadásul elég a $\Rightarrow$: irányt bizonyítani: a $\Leftarrow$: következik abból, hogy minden ESÁ fordítottja megvalósítható legfeljebb három ESÁ-sal. Ezért ha egy lin.összefüggés fennál M'-re akkor az ezt legfeljebb három ESÁ megőrzi, tehát igaz marad M-re is.

$\Rightarrow$: A bal oldali összefüggés azt jelenti, hogy M minden sora megoldja a $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i$ egyenletet, azaz M bármely sorának első elemét x_1, a másodikat x_2, stb helyébe helyettesítve fennáll az egyenlőség. A jobb oldali összefüggés igazolásához ugyanezt kell megmutatni M' sorairól. Sorcsere esetén pontosan ugyanazokról az egyenlőségekről van szó, skalárral szorzás esetén az egyik egyenletet skalárral kell végig szorozni, sorösszeadás esetén pedig az új egyenlőség két korábban teljesülő egyenlet összege. $\square$

Példa: Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi M mátrix oszlopai.

Megoldás: Varázslás. ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A kapott RLA mátrixra $\underline{o}'_4 = -7\underline{o}'_1 + 3\underline{o}'_2 + 2\underline{o}'_3$. Így M oszlopaira is fennáll az $\underline{o}_4 = -7\underline{o}_1 + 3\underline{o}_2 + 2\underline{o}_3$ összefüggés, azaz M egy oszlopa előáll a többi oszlop lineáris kombinációjaként. Tehát M oszlopai nem lin. ftn.-ek.

9.8 Varázslás II: bázis előállítása generátorrendszerből

Példa:

Keressük meg az alábbi vektorok által generált V altér egy bázisát!

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az $(\underline{u}|\underline{v}|\underline{w}|\underline{x}|\underline{y})$ mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá alakítjuk. Ehhez szabad (de nem kötelező) Gauss-eliminációt használni.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{u} & \underline{v} & \underline{w} & \underline{x} & \underline{y} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ezért $\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{x} = 3\underline{u} - 2\underline{v}$, azaz $\underline{w}, \underline{x} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\rangle$.
Tehát $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V generátorrendszere.
Másrészt $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ lineárisan független.
Konklúzió: $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}\}$ a V altér egy bázisa. $\square$

9.9 Varázslás III: koordinátavektor-számítás

Példa: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ bázisa, ahol
$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ill. $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Keressük a $[v]_B$-t, ha $v \in V$.

Megoldás: A vektorokból képzett mátrixot ESÁ-okkal RLA-vá transzformáljuk:

$$(\underline{b}_1|\underline{b}_2|\underline{v}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

Az M' RLA mx $\underline{o}'_1, \underline{o}'_2, \underline{o}'_3$ oszlopaira teljesül, hogy $\underline{o}'_3 = -3\underline{o}'_1 + 4\underline{o}'_2$.
Az ESÁ-ok oszlopokra gyakorolt hatásáról látottak szerint $\underline{v} = -3\underline{b}_1 + 4\underline{b}_2$.
Tehát $\underline{v} \in V$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. □

9.10 Mi haszna a lineáris algebrának???

Amiről itt és most nem esik szó: koordinátageometria, konvex alakzatok geometriája ill. lineáris célfüggvény optimalizálását előíró feladatok megoldása. Ezek mindegyike fontos alkalmazási terület.

A matematikailag különösen érdekes alkalmazások általában abból fakadnak, hogy egy lineáris algebrától látszólag távol álló feladatról derül ki, hogy megfogalmazható lineáris algebrai terminológiával. Az ezen kapcsolat révén rendelkezésre álló eszközök pedig jóval hatékonyabbak lehetnek, mint az eredeti feladat témakörében szokásosak. Akár a legegyszerűbb linalg. eszköz is (mint amilyen pl. az FG-egyenlőtlenség) alkalmas lehet nehéz tételek meglepően egyszerű igazolására.

Buta kérdés: Egy n-elemű alaphalmazból legfeljebb hány részhalmazt lehet úgy kiválasztani, hogy bármely két kiválasztott részhalmaznak pontosan ugyanannyi közös eleme legyen?

Fisher-egyenlőtlenség: Ha $\emptyset \neq A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ és $|A_i \cap A_j| = \lambda\ \forall 0 < i < j \leq k$, akkor $k \leq n$.

Biz: (1) Ha $\lambda = 0$, akkor az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok diszjunktak. Ekkor az állítás triviális, hisz $|A_i| \geq 1\ \forall i$. Ezért feltehető, hogy $\lambda > 0$.

(2) Világos, hogy $|A_i| \geq \lambda\ \forall 1 \leq i \leq k$. Ha mondjuk $|A_1| = \lambda$, akkor $A_1 \subseteq A_j\ \forall j \neq 1$. Ezért az $A_2, \ldots A_n$ halmazok A_1-en kívüli része egymástól diszjunkt, így a darabszámuk legfeljebb $n - \lambda$. Ebből pedig $k \leq n - \lambda + 1 \leq n$ adódik.

Ezért mostantól feltesszük, hogy $|A_i| > \lambda$ teljesül az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok mindegyikére.

(3) Legyen $|A_i| = \lambda + \mu_i$, ahol $\mu_i > 0\ \forall 1 \leq i \leq k$.

Jelölje rendre $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ az $A_1, \ldots, A_k$ halmazok karakterisztikus vektorát, azaz $\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{pmatrix}$, ahol $\chi_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_j \in A_i \\ 0 & \text{ha } x_j \notin A_i \end{cases}$.

Megmutatjuk, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lin.ftn-ek. Ekkor ugyanis az FG-egyenlőtlenség miatt $k \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Tfh $\lambda_1\underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{a}_k = \underline{0}$. A bal oldali vektorok A_j elemeinek megfelelő koordinátáinak összegére $\mu_j\lambda_j + \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ adódik.

Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0$, akkor $\lambda_j < 0\ \forall j$, így $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, ellentmondás.

Ha pedig $\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0$, akkor $\lambda_j > 0\ \forall j$, így ez sem lehetséges.

Végül, ha ha $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, akkor $\lambda_j = 0\ \forall j$. Ezért az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok csakugyan lin.ftn-ek. $\square$

Mit tanultunk a bázisokról?

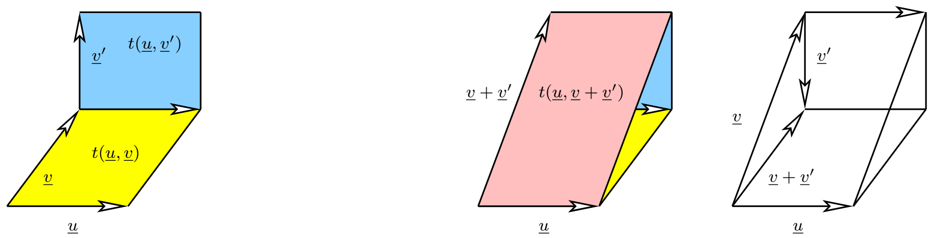
- Altér bázisa
- Kétféle módszer a bázis előállítására
- Bázisképzés generátorrendszer ritkításával
- Bázisképzés egyenletrendszerrel megadott altér esetén
- Altér dimenziója
- Bázis segítségével minden altér koordinátázható
- Koordinátavektor, és előállítása lin. egyenletrendszerből
- RLA mátrix oszlopainak tulajdonsága
- ESÁ hatása a mátrix soraira és oszlopaira
- Lin. ftnség eldöntése, bázis és koordinátavektor számítása varázslással
- Egészen fura célokra is használható a linalgebra

10. fejezet

Négyzetes mátrixok determinánsa

A determináns nagyon fontos fogalom a lineáris algebrában. A következő két szakasz célja az, hogy valamiféle szemléletes jelentést tulajdonítsunk neki, és csak ezt követi a precíz definíció. Hangsúlyozzuk, hogy míg a szemléletes jelentést egyáltalán nem kérjük számon a vizsgán, a pontos definíció ismerete, megértése és alkalmazása elengedhetetlen.

10.1 Paralelogramma területe



Def: Tetszőleges $\underline{u},\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén jelölje $t(\underline{u},\underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által feszített paralelogramma területét.

Megf: Teljesül, hogy $t(\underline{u},\underline{v}+\underline{v}') = t(\underline{u},\underline{v}) + t(\underline{u},\underline{v}')$, $t(\underline{u}+\underline{u}',\underline{v}) = t(\underline{u},\underline{v}) + t(\underline{u}',\underline{v})$, ill. $t(\lambda\underline{u},\underline{v}) = \lambda t(\underline{u},\underline{v}) = t(\underline{u},\lambda\underline{v}) \quad \forall \underline{u},\underline{v} \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Megj: Ehhez az szükséges, hogy $t(\underline{u},\underline{v})$ negatív is lehessen.

Konkrétan: $t(\underline{u},\underline{v})$ attól függően pozitív ill. negatív, hogy $\underline{u}$-t pozitív vagy negatív irányban kell konvex szöggel elforgatni ahhoz, hogy $\underline{v}$ irányába mutasson.

Megállapodhatunk abban, hogy $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2) = 1$ (és persze $t(\underline{e}_2,\underline{e}_1) = -1$).

Köv: $t(\underline{u},\underline{v}) = -t(\underline{v},\underline{u})$.

Hasonló igaz 3D-ben: ha $t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ a 3 vektor feszítette paralelepipedon előjeles térfogata, akkor pl

$t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}+\underline{w}') = t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) + t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}')$, $\quad t(\lambda\underline{u},\underline{v},\underline{w}) = \lambda t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$,
$t(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) = -t(\underline{w},\underline{v},\underline{u})$ ill. $t(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3) = 1$.

Megállapodás szerint $t(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ akkor pozitív, ha $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ jobbsordású rendszer.

10.2 Paralelogrammaterület számítása

Jelölje az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok feszítette paralalogramma térfogatát $|\underline{u}, \underline{v}| = t(\underline{u}, \underline{v})$. A korábban megfigyelt összefüggések alapján

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$
$$= a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{vmatrix} =$$
$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc$$

Paralelepipedonra is elvégezhetünk egy hasonló számítást:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \ldots = aei\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + ahf\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bdi\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+cdh\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + bfg\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + ceg\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Tanulság: A paralelogramma területének ill. a paralelepipedon térfogatának kiszámításához összeadjuk azokat az előjeles szorzatokat, amiket úgy kapunk, hogy az összes lehetséges módon felsoroljuk a standard bázis egységvektorait, és az általuk feszített négyzet ill. kocka előjeles térfotatát annyiszor vesszük, amennyi az 1-esek helyén a mátrixban álló számok szorzata.

Megf: Ugyanez $\mathbb{R}^n$-ben is alkalmazható, két feltevés mellett.
(1) Az egység-hiperkocka térfogata ± 1, és
(2) a térfogat előjele attól függ, hogy a kockaélek felsorolása hány cserével érhető el az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből. (Minden csere egy-egy előjelváltást jelent.)

Kínzó kérdés: A (2)-beli előjeldefiníció vajon egyértelmű?

Lehetséges vajon, hogy az egységvektorok valamely konkrét sorrendje páros sok és páratlan sok cserével is elérhető az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sorrendből?

Megnyugtató válasz: Nem, ez nem lehetséges.

10.3 Permutációk inverziószáma

Def: Az $f : A \to B$ függvény **bijekció**, ha minden B-beli elem pontosan egy A-beli képeként áll elő.

Def: A $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekciót **n elem permutációjának** nevezzük. Az ilyen permutációk halmaza S_n.

Megf: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ vektorok tetsz. sorrendje egyértelműen leírható egy σ permutációval: $\sigma(i) = j$, ha e_i j-dik a sorban.

Példa: Az $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendhez az alábbi σ permutáció tartozik:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az **$\{i, j\}$ pár inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$

permutáció $I(\sigma)$-val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Példa: Az egységvektorok $(\underline{e}_3, \underline{e}_8, \underline{e}_5, \underline{e}_7, \underline{e}_1, \underline{e}_6, \underline{e}_2, \underline{e}_4)$ sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma $I(\sigma) = 2+6+3+4+0+2+0+0 = 17$.

Megf: (1) Szomsz. vektorok cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz. vektor cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz: (1): A két felcserélt vektor viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

(2): Ha a felcserélt vektorok között k másik vektor van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k+1$ szomszédos vektorpár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k+1)$-szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik. $\square$

Köv: Az egységvektorok egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma pontosan akkor páros, ha ez a sorrend páros sok vektorcserével kapható az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ sorrendből.

Köv: Az egységvektorok σ permutációja által meghatározott egységhiperkocka előjeles térfogata $(-1)^{I(\sigma)}$.

Kínzó kérdés: Hogyan határozható meg gyorsan ez az előjel?

10.4 Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai az egységvektorok a megadott sorrendben. Ekkor a mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

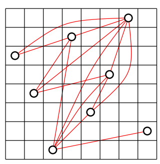
Legyen σ az egységvektorok ezen sorrendjéhez tartozó permutáció.

Q: Mit jelent az, hogy egy $\{i, j\}$ pár σ szerint inverzióban áll?

A: Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.



Példa: Az ábrán látható bástyaelhelyezéshez tartozó inverziószám $I(\sigma) = 14$,

10.5 A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$, ahol $a_{i,j}$ az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

A $(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Példa: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei-ahf-bdi+cdh+bfg-ceg$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástyaelhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másfélének nincs.

(3) 2×2-es és 3×3-as mátrixok esetén a determináns az oszlopok által feszített paralelotop előjeles területe ill. térfogata.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $\mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i,j$.

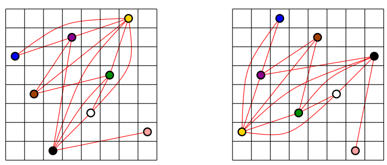
Példa: $\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4,2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4,2 & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}$

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^\top|$.

Különös következmény: Bármely 3×3-as mátrixra igaz, hogy a sorai és oszlopai által feszített paralelepipedonok előjeles térfogatai megegyeznek.

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek $A^\top$-ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha $A^\top$-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$-ban ugyanazokat a szorzatokat kell összeadni ugyazzal az előjellel, mint $\det(A^\top)$-ban. □

Példa:



Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor hasonló tulajdonság teljesül a determináns soraira is.

Megj: Egy $n\times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszert kaphatunk, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

10.6 A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\underline{u}_i' \in \mathbb{R}^n$, akkor
(1) $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i', \dots, \underline{u}_n|$, azaz ha az i-edik oszlop felbomlik két vektor összegére, akkor a determináns annak a két determinánsnak az összege, amelyikekben az i-edik oszlopot az egyes vektorokkal helyettesítjük.

(2): $|\underline{u}_1,\ldots,\lambda\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_n| = \lambda|\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_n|$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$: az i-edik oszlopot λ-val végigszorozva a determináns is λ-szoros lesz.
(3) $\underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0$, azaz ha az i-edik oszlopban csak 0-k állnak, akkor a determináns is 0.
(4) $|\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_j,\ldots,\underline{u}_n| = -|\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_j,\ldots,\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_n|$. Az i-edik és j-edik oszlop cseréjekor a determináns előjelet vált.
(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Biz: (1): A bal oldali determináns minden kifejtési tagjában az i-dik oszlopbeli tényező a $\underline{u}_i$ és $\underline{u}_i'$ egy koordinátaösszege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai.

(2): A bal oldali determinánas minden kifejtési tagjából kiemelve λ-t épp a jobb oldalon szereplő determináns kifejtési tagjait kapjuk.

(3): Mivel $\underline{u}_i = \underline{0} = 0\cdot\underline{u}_i$, ezért (2) miatt $|\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_n| = |\underline{u}_1,\ldots,0\cdot\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_n| = 0\cdot|\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_i,\ldots,\underline{u}_n| = 0$.

(4): Minden kifejtési tagot úgy kapunk meg, hogy az $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n$ vektorok mindegyikének kiválasztjuk egy-egy különböző koordinátáját, és ezeket összeszorozzuk. Ezért a két determináns kifejtési tagjaiban ugyanazok a szorzatok szerepelnek. Az ugyanazon szorzathoz tartozó kifejtési tagok egy oszlopcserével kaphatók egymásból. Az oszlopcsere két egységvektor felcserélésének felel meg a permutációban, ami által az inverziószám 1-gyel változik. Ezért az azonos szorzathoz tartozó kifejtési tagok abszolút értéke megegyezik, előjelük pedig egymással ellentétes. Összességében tehát a determináns értéke is (-1)-szeresre változik oszlopcsere hatására.

(5): A két egyforma oszlopot felcserélve a mátrix nem változik, így a determimáns sem. (4) miatt viszont a determináns (-1)-szeres lesz, azaz $|A| = -|A|$, ahonnan $|A| = 0$ adódik. $\square$

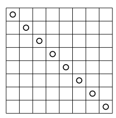
Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz: (1): Az előző állítás (2) részét alkalmazzuk az $A^\top$ transzponáltra.
(2): Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az $A^\top$ transzponáltra.
(3): Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponáltra a lecserélt sorú determináns megkapható $|A|+|A'|$ összegként, ahol A'-nek két egyforma sora van. A korábban látottak és az előző állítás (3) része miatt $|A'| = |(A')^\top| = 0$. $\square$



Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ \hline 0 & ? & ? & ? & ? & ? \\ \hline 0 & 0 & ? & ? & ? & ? \\ \hline 0 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ \hline \end{array}$$

Def: Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.
(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Biz: (1): Ha egy sor v1-e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0.

(2): Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív. □

10.7 A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} =$

$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$

Az egyes lépések indoklása az alábbi.

Az első sorból a másodikat kivonva a determináns nem változik.

Az első sort 2-szer ill. 1-szer kivonva a második ill. harmadik sorokból a determináns nem változik.

A második és negyedik sort felcseréve a determináns előjelet vált.

A második sort 2-szer ill. 6-szor kivonva a harmadik ill. negyedik sorokból a determináns nem változik.

A harmadik sort -1-gyel végigszorozva a determináns előjelet vált.

A harmadik sor 5-szörösét a negyedikhez adva a determináns nem változik.

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.

Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célravezetőbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

10.8 A kifejtési tétel

Megf: Tfh $\underline{e}_i$ az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix j-dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i-1$ sora az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal az A_1 ill. A_2, az utolsó $n-i$ sor az első $j-1$ ill. utolsó $n-j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j-1$ oszlop- és $i-1$ sorcserével adódik:

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{A_2} \\ ??? & 1 & ??? \\ \boxed{A_3} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{A_4} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{A_1} & \boxed{A_2} \\ 1 & & ????? \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \boxed{A_3} & \boxed{A_4} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} 1 & ????? \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \begin{matrix}\boxed{A_1} & \boxed{A_2}\\ \boxed{A_3} & \boxed{A_4}\end{matrix} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{A_2} \\ \boxed{A_3} & \boxed{A_4} \end{vmatrix} = \mathbf{A_{i,j}}$$

Def: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ **előjeles aldeterminánsa** az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$-szerese.

A fenti megfigyeléssel másképp is kiszámítható a detereminláns.

Determinánsok kifejtési tétele (j-dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \left| \boxed{A_1}, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, \boxed{A_2} \right| = \sum_{i=1}^n \left| \boxed{A_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boxed{A_2} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \left| \boxed{A_1}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boxed{A_2} \right| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \qquad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a detereminláns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(9-11)+14(3-1)-(6-2)+(9-11)-(6-22) = 4+28-4-2+16 = 42$$

Megf: A kifejtési tétel alkalmazásakor az egyes előjeles aldeterminánsokhoz tartozó előjel meghatározható sakktáblaszabállyal is:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Mit tanultunk a determinánsról?

- Paralelogramma előjeles területére és paralelepipedon előjeles térfogatára vonatkozó azonosságok
- Az egységvektorok feszítette paralelotop térfogatának előjele

- Permutációk inverziószáma, elempár-csere hatása
- Négyzetes mátrix, főátló, transzponált
- Determináns, kifejtési tag, bástyaelhelyezés
- Transzponált determinánsa
- Oszlopműveletek hatása a determinánsra
- Determinánsszámítás ESÁ-okkal
- Kifejtési tétel, sakktáblaszabály

11. fejezet

Mátrixműveletek és mátrixok invertálása

11.1 Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Példa: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$ $\qquad 7 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 6006 & 11 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 7 & 42042 & 77 \end{smallmatrix}\right)$

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ nem értelmes.

Köv: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, akkor (1) $A + B = B + A$, (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, (4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, továbbá (6) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, (7) $\lambda \cdot A^\top = (\lambda A)^\top$.

Vektorok egymással történő összeszorzását nem értelmeztük eddig. Most fogjuk, de bizonyos korlátokkal. Ehhez először azonos méretű vektorokat tanulunk meg összeszorozni.

11.2 A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata** $\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, (2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{-1} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

Megj: A Pitagorasz-tétel miatt az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok merőlegessége azzal ekvivalens, hogy

$$\|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = (\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{u}\cdot\underline{u}+\underline{v}\cdot\underline{v}+2\underline{u}\cdot\underline{v} = \|\underline{u}\|^2+\|\underline{v}\|^2+2\underline{u}\cdot\underline{v} \,,$$

innen $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ adódik. Tehát $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$.

11.3 További vektorszorzások 3D-ben

Megf: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vektorok $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$-vel jelölt **vegyes szorzata** az általuk feszített paralelepipedon előjeles térfogata.

Ez a térfogat az alábbi módon számítható ki oszlop szerinti kifejtéssel:

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ -det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Megj: A vizsgált paralelepipedon térfogata megkapható $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ alakban is, ahol $\underline{v} \times \underline{w}$ a jól ismert vektoriális szorzat amit a jobbkéz-szabály ill. a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által feszített paralelogramma területe segítségével definiálunk.

Azt kaptuk tehát, hogy $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$, ami igazolja hogy

$$(\underline{v} \times \underline{w}) = \begin{pmatrix} det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ -det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

11.4 Mátrixok szorzása

Az $\mathbb{R}^n$-beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet mátrixként összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix **sor**vektorai $\underline{a}_1, \ldots \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k\times\ell}$ mátrix **oszlop**vektorai $\underline{b}^1, \ldots \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $\underline{a}_i \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa: $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&2&4\\0&-1&-2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&-2&-4\\2&1&2\end{pmatrix}\end{array}$ ill. $\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ & \begin{pmatrix}2&4\\1&7\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4&2\\7&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&7\\2&4\end{pmatrix} & \end{array}$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbiak.
(1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$.
(2) $A(B+C) = AB + AC$ ill. $(A+B)C = AC + BC$. (3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Biz: A skaláris szorzásról tanult azonosság szerint $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v})$. Ezért mindhárom szorzatban az i-dik sor j-dik eleme az A i-dik sora és B j-dik oszlopa skaláris szorzatának a λ-szorosa ($\forall i, j$ esetén).

(2): Tudjuk, hogy $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$. Ezért $A(B+C)$ ill. $AB+AC$ i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B és C j-dik oszlopai összegének skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). A másik disztributivitás a skaláris szorzás $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ alakú, másik disztributív azonosságából következik.

(3): $(AB)^T$ j-dik sorának i-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának a skaláris szorzata, ami ugyanaz, mint $B^\top$ j-dik sorának és $A^\top$ i-dik oszlopának a skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). □

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. A mátrixszorzás nem kommutatív.

Tétel: A mátrixszorzás asszociatív (átzárójelezhető): ha AB és BC egyaránt értelmes, akkor $A(BC) = (AB)C$. □

Ezen a ponton ezt a tételt elég körülményes lenne igazolni. A direkt módszer kettős szummákkal történő, nehezen átlátható számításokat igényelne. Az „igazi” bizonyítás a függvénykompozíció művelet asszociativitására vezeti vissza a tételt, de az ehhez szükséges eszközöket majd csak a lineáris leképezésekről szóló részben tárgyaljuk, és ott mutatjuk be a bizonyítást is. Addig is bátran használjuk a tételt, mert számos később következő bizonyításban kulcsfontosságú szerepet kap. (A vizsgán természetesen nem kérjük a tétel biznyítását, elegendő csupán az állítással tisztában lenni.)

Az alábbi tétel a determinánsok egy fontos tulajdonságára mutat rá, de ezt sem bizonyítjuk itt.

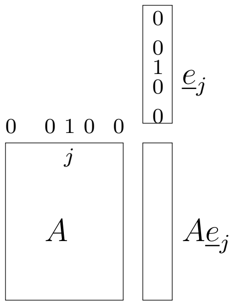
Determinánsok szorzástétele: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$. □

11.5 A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa.

Megf: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor
(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ egyégvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i-dik sora.
(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$.
(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^\top \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Biz: (1): Könnyen látszik a definícióból.



Az $\underline{e}_i^\top$-tal szorzás hasonló tulajdonsága következik az oszlopokról szóló fenti állításból és a transzponáltak szorzásáról tanultakból.
Az itt látható ábra „transzponáltjának" segítségével sem nehéz erről meggyőződni.

(2): Az $A \cdot I_k$ mátrix j-dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.

Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i-dik sora (1) miatt az A i-dik sora $\forall i$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (\underline{a}_1,\ \underline{a}_2, \dots,\ \underline{a}_k) & (\ \underline{a}_1, \underline{a}_2,\ \dots\ , \underline{a}_k) \end{array}$$

(3): Tfh $\underline{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{u} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{e}_k$, így aztán $A \cdot \underline{u} = A \cdot (\lambda_1 \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{e}_k) = \lambda_1 A \cdot \underline{e}_1 + \ldots + \lambda_k A \cdot \underline{e}_k$, és (1) miatt $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j-dik oszlopa $\forall j$.

A másik, $\underline{v}^\top \cdot A$-ról szóló tulajdonság hasonlóan igazolható. $\square$

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b}^j$ oszlop tartamazza.

(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a}_i$ sorban szereplő együtthatókkal.

Példa:
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Biz: (1,2): A mátrixszorzás definíciójából azonnal látszik, hogy az AB szorzat j-edik oszlopa Ab^j, az i-edik sora pedig $a_i B$. Ezért a bizonyítandó állítás közvetlenül adódik az előző **Megf** (3) részéből. $\square$

Ezzel igazoltuk a szorzatmátrix sorainak és oszlopainak egy különös tulajdonságát, nevezetesen, hogy ezek a szorzótényezők sorainak ill. oszlopainak lineáris kombinációi. Most azt igazoljuk, hogy ennél nem is kell több ahhoz, hogy egy mátrixot szorzatalakban állítsunk elő.

Lemma: Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lineáris kombinációja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lineáris kombinációi, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

Biz: Ha a C mátrix j-edik oszlopa az A oszlopainak lineáris kombinációja, akkor legyen $\underline{b}^j$ az a vektor, ami az A-beli oszlopokhoz tartozó együtthatókat tartalmazza ebben a lineáris kombinációban. Legyen B az a mátrix, amit az így kapott $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots$ oszlopvektorok egymás után írásával kapunk. A mátrixszorzás definíciója szerint ekkor $AB = C$.

Hasonlóan, ha $\underline{a}_i$ jelöli azt a sorvektort, amibe azokat az együtthatókat gyűjtjük össze, amik a C mátrix i-edik sorának az B mátrix sorainak lineáris kombinációjaként történő előállításában szerepelnek, akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots$ sorok alkott a A mátrixra $AB = C$ teljesül. $\square$

Köv: Ha A' ESÁ-okkal kapható A-ból, akkor $A' = BA$ alakú.

Biz: Az imént bizonyított **Lemma** miatt elegendő pusztán annyit igazolni A'-ről, hogy minden sora előálla az A mátrix sorainak lineáris kombinációjaként. Ez a tulajdonság természetesen teljesül a kiindulási A mátrixra, és könnyen látható, hogy ha egy mátrix ilyen tulajdonságú, akkor a belőle egyetlen ESÁ elvégzésével kapott mátrix szintén ilyen tulajdonságú marad. Ezért az ESÁ-ok sorozatával kapott A' mátrixra is fennáll ez a tulajdonság, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. $\square$

11.6 Mátrix inverze

Láttuk, hogy az I_n egységmátrix az $n \times n$-es mátrixok között úgy viselkedik, mint a valós számok körében az 1: bármit megszorozva vele a „bármit" kapjuk: $X \cdot I_n = X, I_n \cdot Y = Y$.

Ha ilyen irányból nézünk a mátrixszorzásra, akkor a valós számokon értelmezett reciprokfogalom megfelelője a négyzetes mátrixok körében egy olyan $Y =$„$1/X$" mátrix, amire $XY = I_n$. Látni fogjuk, hogy bizonyos mátrixoknak van „reciproka", másoknak pedig nincs, épp úgy, ahogy a 0-nak sincs a valósak körében. Megállapítjuk, hogyan számítható a „reciprok" és mitől függ, hogy van-e.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **balinverze** az A^B mátrix, ha $A^B A = I_n$. Az A^J mátrix az A **jobbinverze**, ha $AA^J = I_n$.

Megf: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

Biz: A mátrixszorzás asszociativitása (átzárójelezhetősége) miatt
$A^B = A^B I_n = A^B(AA^J) = (A^B A)A^J = I_n A^J = A^J$. $\square$

Tétel: (Van A-nak balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Ezt a tételt a 11.8 szakaszban bizonyítjuk.

Köv: A-nak vagy semilyen inverze sincs, vagy van mindkét oldali. Ezért A inverzét a továbbiakban $\mathbf{A^{-1}}$-zel jelöljük.

Kínzó kérdés:
Miféle mátrixoknak van inverze, és hogyan lehet azt megtalálni?

Részleges válasz: Csak négyzetes mátrixnak lehet inverze.

Állítás: Ha A balról invertálható, akkor A sorai lin.ftn-ek.

Biz: Ha A balról invertálható, akkor $A^B A = I_n$. A mátrixszorzás előbb látott különös tulajdonsága miatt I_n minden sora az A sorainak egy-egy lin.komb-ja, vagyis I_n minden sora benne van az A sorai által generált altérben. Mivel I_n sorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, ezért A sorainak is generálniuk kell a teljes $\mathbb{R}^n$ teret. Ezért A soraiból kiválasztható $\mathbb{R}^n$ egy bázisa. Mivel A-nak n sora és a bázisnak n eleme van, ez a bázis csakis összes sor együttese lehet. Márpedig ha A sorai bázist alkotnak, akkor persze lin.ftn-ek is. $\square$

Köv: Ha A-nak van balinverze, akkor I_n előáll A-ból ESÁ-okkal.

Biz: Mivel A sorai lineárisan függetlenek, ezért A sorai egy n-dimenziós alteret, konkrétan a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálják. Alakítsuk az A mátrixot ESÁ-ok segítségével RLA mátrixszá! Az így kapott A' mátrix n sora is a teljes $\mathbb{R}^n$ teret generálja. Ezért A' sorai lineárisan függetlenek, így A'-nek nem lehet csupa0 sora. Tehát $A' = I_n$. $\square$

Megf: (1) Minden ESÁ egy mátrixszal történő balszorzás.
(2) ESÁ-ok egymásutánja is egy mátrixszal történő balszorzás.
(3) Ha ESÁ-okkal A-ból I_n lesz, akkor A^B-vel szoroztunk balról.

Biz: (1): Könnyű ellenőrizni, hogy ha I_n-en elvégzünk egy ESÁ-t, és a kapott I' mátrixszal balról megszorzunk egy $n \times k$ méretű A mátrixot, akkor a szorzatot megkaphatjuk úgy is, hogy A-n végrehajtjuk ugyanezt az ESÁ-t.

(2): Ha az A mátrixon ESÁ-ok egymásutánját végezzük, akkor ezek mindegyike egy-egy balszorzásnak felel meg, így k db ESÁ után kapott mátrix $X_k(X_{k-1}(\dots(X_1 A))\dots)$. Ez a mátrixszorzás átzárójelezhetősége miatt felírható $((\dots(X_k X_{k-1})\dots X_1)A$ alakban is, vagyis az ESÁ-ok sorozatát megvalósíthatjuk úgy is, hogy A-t balról szorozzuk az $X = ((\dots(X_k X_{k-1})\dots X_1)$ mátrixszal. $\square$

(3): Az ESÁ-ok sorozata egy M mátrixszal történő balszorzásnak felel meg. Erre az M-re teljesül tehát, hogy $MA = I_n$. Ezért $M = A^B$. $\square$

Köv: Ha az $(A|I_n)$ mátrixból ESÁ-okkal RLA mátrixot képezünk, és A helyén megjelenik I_n, akkor I_n helyén A^B jelenik meg. Ha A helyén nem jelenik meg I_n, akkor A-nak nincs balinverze.

Biz: Az előző **Megf** (3) részében azt láttuk, hogy az ESÁ-ok az A^B-vel történő balszorzásnak felelnek meg. Ezért az átalakított mátrix jobb oldali $n \times n$-es része $A^B \cdot I_n = A^B$-nek adódik. $\square$

11.7 Inverzszámítás

Ebben a szakaszban konkrét példákon keresztül mutatjuk be az inverz kiszámítására most igazolt módszert, majd levezetünk egy, az inverz létezését karakterizáló feltételt.

Példa: Keressük meg a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét! Lássuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\boxed{\text{I}} \mapsto \boxed{\text{I}} - \boxed{\text{II}} \qquad \boxed{\text{III}} \mapsto \boxed{\text{III}} - 2\boxed{\text{II}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{II}} \mapsto \boxed{\text{II}} - 3\boxed{\text{III}}$$

A bal oldalon egységmátrixot kaptunk, ezért $A^B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 17 & -8 \end{pmatrix}$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & & & & & -1 & -8 & 4 \\ & & & & & & 1 & 6 & -3 \\ & & & & & & 2 & 17 & -8 \\ \hline & & & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -8 & 4 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 2 & 17 & -8 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

győztünk, sőt: $A^B = A^J$.

Példa: Keressük meg most a $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix balinverzét! Nosza:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 19 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\boxed{\text{I}} \mapsto \boxed{\text{I}} - \boxed{\text{II}} \qquad \boxed{\text{III}} \mapsto \boxed{\text{III}} - 2\boxed{\text{II}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\text{II}} \mapsto \boxed{\text{II}} - 3\boxed{\text{III}}$$

A bal oldali részben csupa0 sort kaptunk, tehát az A sorai által generált alteret két vektor generálja, így nem lehet benne három független vektor. Ezért A sorai nem generálhatják a standard bázis elemeit, vagyis I_n biztosan nem kapható meg A-ból balszorzással, azaz A-nak nincs balinverze.

Ezzel a gondolatmenettel lényegében az alábbi állítást igazoltuk.

Köv: (1) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor A-nak van balinverze, ha A sorai lineárisan összefüggők, akkor A-nak nincs balinverze.

(2) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor A-nak van jobbinverze, ha A oszlopai lineárisan összefüggők, akkor A-nak nincs jobbinverze.

Biz: (1): Korábban láttuk, hogy ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren. Lépezzük ESÁ-ok segítségével A-ból az A' RLA mátrixot!

Tegyük fel először, hogy A sorai lineárisan függetlenek. Mivel az A sorai által generált altér n-dimenziós, így az A' mátrix sorai is n-dimenziós alteret generálnak, ezért A' sorai is lineárisan függetlenek. Nem tartalmazhat tehát A' csupa0-sort, ezért A' szükségképpen az egységmátrix. Ennek megfelelően az inverz képzésére szolgáló fent illusztrált módszer segítségével megkapjuk A balinverzét.

Ha A sorai lineárisan összefüggők, akkor az A sorai által generált altér dimenziója legfeljebb $n-1$. A mátrixszorzás különös tulajdonsága miatt tetszőleges B mátrix esetén a BA szorzatmátrix minden egyessor az A sorainak lineáris kombinációja, tehát AB sorai egy legfeljebb $(n-1)$-dimenziós alteret generálnak. Mivel az I_n egységmátrix sorai n-dimenziós alteret generálnak, ezért I_n nem állhat elő BA alakban, azaz A-nak nincs balinverze.

(2): A korábban látott $(AB)^\top = B^\top A^\top$ azonosság miatt az A mátrixnak ponotsan akkor van jobbinverze, ha az $A^\top$ mátrixnak van balinverze. (1) miatt ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy $A^\top$ sorai lineárisan függetlenek. A transzponálás definíciója miatt ez A oszlopainak lineáris függetlenségével egyenértékű. □

11.8 Az inverz és a determináns kapcsolata

Lemma: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$)

Biz: Legyen V az A sorai által generált altér, és A' az A-ból ESÁ-okkal kapható RLA mátrix (ami felső háromszögmátrix). Mivel ESÁ nem változtat a sorok által generált altéren, ezért A' sorai is V-t generálják. Így (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($\dim V = n$) $\iff$ (A' sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A'-nek nincs csupa0 sora) $\iff$ (A' minden sorában van v1) $\iff$ ($|A'| = 1$) $\iff$ ($|A| \neq 0$)

Az utolsó ekvivalencia azért igaz, mert ESÁ nem változtat a determináns 0/nem0 voltán. □

Köv: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy
(A-nak van balinverze) $\iff$ (A-nak van jobbinverze)

Biz: (A-nak van balinverze) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ ($|A^\top| \neq 0$) $\iff$ ($A^\top$ sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (A-nak van jobbinverze) □

Másféleképp is igazoljuk, hogy ha $|A| \neq 0$, akkor A invertálható.

Tétel: Tfh $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és legyen a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

Biz: Az AB i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata, azaz $a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n}$, ahol $a_{i,k}$

az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét jelenti. Ha $i = j$, akkor ez az összeg épp az A i-dik sor szerinti kifejtése, vagyis $|A|$. Ha $i \neq j$, akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az A' mátrixnak az i-dik sor szerinti kifejtése, amit A-ból úgy kapunk, hogy a j-dik sor helyére az i-ediket írjuk. Mivel A' két sora egyforma, ezért $|A'| = 0$. $\square$

Köv: A fenti tétel jelöléseivel: ha $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$.

Biz: $A \cdot \left(\frac{1}{|A|}B\right) = \frac{1}{|A|}(AB) = \frac{1}{|A|}(|A|I_n) = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}B$ $\square$

Köv: Négyzetes mátrix inverzének kiszámítására két módszerünk is van: vagy egy $n \times 2n$ méretű mátrixból RLA mátrixot készítünk ESÁ-okkal, vagy kiszámítjuk $|A|$-t és az összes előjeles aldeterminánst.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **reguláris** (avagy **invertálható**), ha A-nak van inverze, és **szinguláris** ha nincs.

Köv: Tfh A négyzetes mátrix. Ekkor (A reguláris) $\iff$ ($|A| \neq 0$) $\iff$ (A sorai lin.ftn-ek) $\iff$ (A oszlopai lin.ftn-ek) $\iff$ (az A-ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)

Mit tanultunk mátrixműveletkről és az inverzről?

- Koordinátánként értelmezett mátrixműveletek (összeadás, skalárral szorzás)
- Vektorok skaláris szorzása (3D: vektoriális és vegyesszorzat)
- Mátrixszorzás és elemi tulajdonságai (disztributivitások, asszociativitások, transzponálás)
- Szorzatmátrix sorainak és oszlopainak viszonya a tényezők soraihoz és oszlopaihoz
- Négyzetes mátrixok „reciproka": balinverz és jobbinverz
- Inverz létezése = sorok, oszlopok lineáris függetlensége
- Inverzszámítás ESÁ-okkal a kibővített mátrixon
- Reguláris (invertálható) mátrixok jellemzése
- Inverzmátrix képlete előjeles aldeterminánsokkal

12. fejezet

Mátrix rangja és mátrixegyenletek

Láttuk, hogy egy négyzetes mátrixnak vagy a sorai is és az oszlopai is lin.ftn-ek, vagy se a sorai, se az oszlopai nem azok. Lehet-e általánosítani ezt a megfigyelést nem négyzetes mátrixokra?

Ebben a formában nem.

Ha mondjuk $n < k$ és egy $n \times k$ méretű mátrix sorai függetlenek, akkor az oszlopok n magasságú vektorok, tehát legfeljebb n lehet közülük független, k semmiképp.

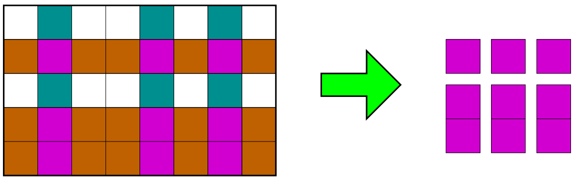
Van azonban egy jól használható általánosítása a fenti ténynek. (Többek között) azt fogjuk megmutatni, hogy ha egy M mátrixnak van k lin.ftn sora, akkor van k lin.ftn oszlopa is, és viszont.

Ebből következik pl. a négyzetes mátrixok fenti tulajdonsága is.

12.1 Mátrix rangja

Def: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix. Az A **sorrangja** $s(A) = k$ ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A **oszloprangja** $o(A) = k$ ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de $k+1$ nem.
Az A **determinánsrangja** A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: $d(A)$.

Megj: Az A mátrix $m \times m$ méretű négyzetes részmátrixa alatt olyan mátrixot értünk, amit úgy kapunk, hogy kiválasztjuk A m sorát és m oszlopát. A részmátrixot a kiválasztott sorok-oszlopok metszéspontjában álló elemek alkotják. Nem kell tehát a kiválasztott soroknak vagy oszlopoknak szomszédosaknak lenniük.



Megf: (1) $o(A) = s(A^\top)$.
(2) Ha $A_1, A_2, \ldots$ ill. $A^1, A^2, \ldots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ és $o(A) = dim\langle A^1, A^2, \ldots\rangle$.

Biz: (1): A transzponált sorai a mátrix oszlopainak felelnek meg.

(2) Legyen B az $\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$ altér egy sorvektorokból álló bázisa. Ekkor egyrészt $|B| = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$, másrészt B a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza, ezért $|B| = s(A)$. Tehát $s(A) = |B| = dim\langle A_1, A_2, \ldots\rangle$.

Az oszloprangra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható az oszlopvektorok segítségével. □

Állítás: ESÁ során a sorrang és az oszloprang sem változik.

Biz: Sorrang Minden ESÁ után keletkező sort generálnak A sorai. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem bővülhet. Láttuk, hogy minden ESÁ visszaalakítható legfeljebb 3 ESÁ-sal. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem is szűkülhet, u.i. a visszaalakításkor nem tudna vissza-bővülni. Tehát ESÁ után a sorok által generált altér nem változik. Ekkor a dimenziója sem változik, ami pedig az előző megfigyelés miatt épp a szóban forgó sorrang.

Oszloprang Ha A egy oszlopa előáll néhány másik oszlop lineáris kombinációjaként, akkor ugyanez az oszlop ugyanilyen együtthatókkal szintén előáll egy ESÁ után is. Ezért ha néhány oszlop az oszlopok által generált altér bázisát alkotja, akkor ugyanezek az oszlopok ESÁ után is generátorrendszert alkotnak, és tartalmaznak egy bázist. Az ESÁ visszaalakíthatósága miatt ez a bázis nem szűkülhet, így az oszlopok generálta altér dimenziója (vagyis az oszloprang) sem változik ESÁ után.

Megf: Ha A RLA mátrix, akkor $s(A) = o(A) =$ v1-ek száma.

Biz: A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így $o(A)$ a v1-ek száma.

RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért $s(A)$ is a v1-ek száma, tehát $s(A) = o(A)$. □

Köv: Tetsz. A mátrix esetén $s(A) = o(A)$.

Biz: Legyen A' az A-ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor $s(A) = s(A') = o(A') = o(A)$. □

Állítás: $(s(A) \geq k) \iff (d(A) \geq k)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh van k lin.ftn sor, ezek alkossák az A' mátrixot. Ekkor $k = s(A') = o(A')$: A'-nek van k lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az A''

mátrixot. Mivel $o(A'') = k = s(A'')$, A'' az A egy $k \times k$ méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa. Tehát $d(A) \geq k$.

$\Leftarrow$: Tfh A'' egy $k \times k$-as nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy A'' sorai lin.ftn-ek. Ezért az A'' sorainak megfelelő A-beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis $s(A) \geq k$. □

Köv: Tetsz. A mátrixra $s(A) = o(A) = d(A)$.

Biz: Ha $s(A) = k$, akkor az előző állítás miatt $d(A) \geq k$.

Ha pedig $d(A) = k$, akkor $s(A) \geq k$. Ezért $s(A) = d(A)$.

Korábban láttuk, hogy $s(A) = o(A)$. □

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **rangja** $r(A) = s(A)$.

Így tehát nem csak definiáltuk a rangot, hanem azt is látjuk, hogy a rangra három lényegesen különböző módon tudunk gondolni.

Rang meghatározása:
ESÁ-okkal képzett (R)LA mátrix v1-ei száma.

12.2 A mátrixrang két tulajdonsága

Lemma: Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel $A+B$ minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért $A+B$ sorait generálják az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{r(A)}, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{r(B)}$ vektorok is. Az $A + B$ sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül. □

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ $\Rightarrow$ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

Biz: Láttuk, hogy AB minden sora a B sorainak lin.komb-ja, ezért AB sorvektorai által generált altér része a B sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$.

Hasonlóan, AB minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, tehát az AB oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az A oszlopai által generáltnál: $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$.

Innen a tétel állítása közvetlenül adódik. □

12.3 Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során?

Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: Tetsz. A, B mátrixra (B előáll $AX = B$ alakban) $\iff$ (B minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Köv: Ha A oszlopai $A^1, \ldots$, akkor $(\exists \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}) \iff (\underline{b} \in \langle A^1, \ldots \rangle)$ $\iff (\langle A^1, \ldots \rangle = \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle) \iff (\dim\langle A^1, \ldots \rangle = \dim\langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle)$ $\iff (r(A) = r(A|\underline{b}))$.

Biz:

□

12.4 Négyzetes együtthatómátrix és egyértelmű megoldás kapcsolata

A lineáris egyenletrendszerek elméletében fontos kérdés, hogy mitől függ a megoldás egyértelműsége. Korábban már láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e következtetni a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrix alapján?

Válasz: Ez a kérdés négyzetes együtthatómátrixra érdekes igazán.

Ha ugyanis az együtthatómátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor a tanult módszerrel történő megoldás során vagy tilos sort kapunk, vagy lesz szabad paraméter, így a megoldás biztosan nem egyértelmű.

Ha pedig a sorok száma több az oszlopokénál, akkor a tanult módszerrel történő megoldás során kapott RLA mátrix együtthatókat tartalmazó részének lesz csupa0 sora, ezért az, hogy van-e tilos sor függ a konkrét $\underline{b}$ vektortól is.

Ha tehát az együtthatómátrix nem négyzetes, akkor biztosan tartozik hozzá olyan lineáris egyenletrendszer, amelyiknek nincs egyértelmű megoldása.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy $|A| = 0$. Láttuk, hogy ilyenkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja $\underline{0}$-t ad: $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: \ A\underline{y} = \underline{0}$. Ezért ha $\underline{x}$ az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$ miatt $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldás. Tehát az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenletnek ha van is megoldása, az nem egyértelmű. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért $|A| \neq 0$.

$\Leftarrow$: Most azt tesszük fel, hogy $|A| \neq 0$. Ekkor A reguláris (azaz invertálható), így A^{-1}-zel szorozhatunk balról. Ezért
$\left[A\underline{x} = \underline{b}\right] \iff \left[\underline{x} = (A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}\right]$, azaz $\underline{x}$ egyértelmű. $\square$

Mit tanultunk mátrixok rangjáról és mátrixegyenletekről?

- Sor-, oszlop- és determinánsrang
- Rangfogalmak egyenlősége
- Rang meghatározása ESÁ-okkal
- Mátrixműveletek hatása a rangra
- Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlettel ekvivalens
- A megoldhatóság jellemezhető a $\underline{b}$ vektor és az A együtthatómátrix oszlopai generálta altér viszonyával
- $n \times n$ egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága az együtthatómátrix regularitásán múlik

13. fejezet

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ leképezés, amire a mátrixszorzás azonosságai miatt $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$-re
(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Ha az A mátrixszal történő balszorzással definiálunk egy, az $\mathbb{R}^n$ térből az $\mathbb{R}^k$ térbe képező függvényt, akkor a fenti tulajdonságok teljesülnek. Ennek érdemes nevet adni, mert fontosak azok a függvények, amik rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \to V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén
(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Példa: Lin.lekép $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^2$-be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az x tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, ha pl. az sík minden (x, y) pontjához a tér $(2x, 0, y/2)$ pontját rendeljük.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixra az A-val történő balszorzás $\mathbb{R}^k$-ból $\mathbb{R}^n$-be ható lineáris leképezést definiál.

Kínzó kérdés: Minden lin.leképezés megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen.

Ezt most igazolni fogjuk.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \to V$ lin.lekép $\iff$ f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i)$ $\forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: $\Rightarrow$: Mivel f additív és homogén, ezért
$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \ldots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \ldots + \lambda_k f(\underline{u}_k)$, azaz f zárt a lin.komb-ra.

$\Leftarrow$: Ha f zárt a lin.komb-ra, akkor
$f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, hisz λu az u lin.komb-ja, továbbá $f(\underline{u}+\underline{v}) = f(1\underline{u}+1\underline{v}) = 1f(\underline{u})+1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$,
tehát f homogén is és additív is. Egyszóval f lin.lekép. $\square$

Köv: Ha $f : U \to V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.leképezést.

Annak az igazolásához, hogy minden f lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással, elegendő csupán azt megmutatni, hogy van olyan $[f]$ mátrix, amire $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$ teljesül $\forall \underline{b}_i$-re. Legyen $\underline{u} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \ldots$ tetszőleges. Ekkor a fentiek alapján

$f(\underline{u}) = \lambda_1 f(\underline{b}_1) + \lambda_2 f(\underline{b}_2) + \ldots = \lambda_1[f]\underline{b}_1 + \lambda_2[f]\underline{b}_2 + \ldots = [f]\underline{u}$. Ezért minden $\underline{u}$ vektor f szerinti $f(\underline{u})$ képe megkapható az $[f]$ mátrixszal történő balszorzással.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$, $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix, amire $A\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz: Legyen $B = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m)$, és $C = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m)$. A Lemma állítása ekvivalens azzal, hogy van olyan A mátrix, amire $A \cdot B = C$. A mátrixszorzás különös tulajdonsága kapcsán azt láttuk, hogy pontosan akkor van ilyen A ha C minden sora előáll B sorainak lineáris kombinációjaként. Ezt fogjuk tehát most igazolni.

Mivel B bázis, ezért B oszlopai lin.ftn-ek. Így a B ESÁ-okkal RLA mátrixszá transzformált alakja $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m)$, azaz I_m áll az RLA mátrix tetején. Ezért I_m minden sora előáll a B sorainak lineáris kombinációjaként. Minden m oszlopból álló mátrix, így C is megkapható I_m sorainak lineáris kombinációjaként. Tehát C sorai előállnak nem csak I_m, de B sorainak lin.komb-jaként is. □

Köv: Tetsz. $f : U \to V$ lin.lekép esetén van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül $\forall \underline{u} \in U$ esetén.

(Azaz minden lin.leképezés tkp egy mátrixszal történő balszorzás.)

Biz: Legyen $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ az U altér egy bázisa. A fenti Lemma szerint van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = f(\underline{b}_i)$ teljesül minden báziselemre. Az $\underline{u} \mapsto [f]\underline{u}$ olyan lineáris leképezés, ami a $\underline{b}_i$ báziselemeken megegyezik f-fel. Mivel a lineáris leképezést a báziselemek képe meghatározza, ezért $f(\underline{u}) = [f]\underline{u}\ \forall \underline{u} \in U$. □

Azt fogjuk most megfigyelni, hogyan is kell az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixát kiszámítani a báziselemek képeinek segítségével.

13.1 Lineáris leképezés mátrixa

Állítás: Ha $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lin.lekép., akkor $[f] = (f(\underline{e}_1), \ldots, f(\underline{e}_k))$.

Megj: A fenti Állítás azt mondja ki, hogy az f lineáris leképezést balszorzással megvalósító $[f]$ mátrixot úgy kapjuk meg, hogy a standard bázis elemeinek képeit, mint oszlopvektorokat egy mátrixba rendezzük.

Biz: Azt kell megmutatni, hogy $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$-re.

Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i = (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), \ldots, f(\underline{e}_n))\, \underline{e}_i = f(\underline{e}_i)$

Ha tehát $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i$, akkor

$$[f]\underline{v} = [f](\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i [f]\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\underline{e}_i) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i) = f(\underline{v})$$

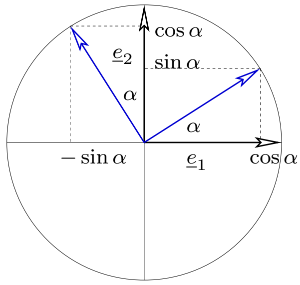
(A 2-dik és 4-dik egyenlőségnél f ill $[f]$ lineáris kombináció tartó tulajdonságát, a 3-diknál pedig a bizonyítás elején szereplő megfigyelést használtuk.) □

Def: A fenti $[f]$ mátrix az $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ lineáris leképezések. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ is lineáris leképezés, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Megj: A Lemma azt mondja ki, hogy lineáris leképezések egymásutánja olyan lineáris leképezés, aminek a mátrixa a két lineáris leképezés mátrixának a szorzata, ahol a bal oldali tényező a másodiknak elvégzett leképezés mátrixa. **Biz:** Először $g \circ f$ linearitását igazoljuk: $g(f(\lambda \underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u}))$ homogén, ill. $g(f(\underline{u}+\underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v}))$ lineáris. Tehát $g \circ f$ csakugyan lineáris leképezés.
Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.



A tanultak szerint $[g \circ f]$ i-dik oszlopa $g(f(\underline{e}_i)) = [g]([f]\underline{e}_i)$. Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i$ az $[f]$ i-dik oszlopa, így $[g]([f]\underline{e}_i)$ a $[g]$ mátrix szorzata az $[f]$ mátrix i-dik oszlopával.
Ez pedig nem más, mint az $[g][f]$ szorzatmátrix i-dik oszlopa.
Ezek szerint a $[g \circ f]$ mátrix i-dik oszlopa megegyezik a $[g][f]$ mátrix i-dik oszlopával ($\forall i$-re), így aztán $[g \circ f] = [g][f]$. □

Ezennel rendelkezésre áll minden szükséges eszköz a mátrixszorzás asszociativitásáról korábban ígért „igazi" bizonyításhoz.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Biz: Legyenek A, B ill. C az f, g és h lineáris leképezések mátrixai. Ekkor $A(BC)$ az $f \circ (g \circ h)$, $(AB)C$ pedig az $(f \circ g) \circ h$ leképezés mátrixa. Márpedig $f \circ (g \circ h)(\underline{v}) = f(g(h(\underline{v}))) = (f \circ g) \circ h(\underline{v})$ miatt e leképezések azonosak, így a mátrixaik is egyenlők. □

Köv: A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy $f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta$, így

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha][f_\beta] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

Innen $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ill. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$ adódik. □

Lineáris leképezések és a mátrixszorzás asszociativitásának felhasználásával váratlan módszerrel igazoltuk a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós képleteket.

Mit tanulhattunk volna lineáris leképezésekről?

- Mátrixszal történő balszorzás (mint leképezés) additív és homogén.
- Additív és homogén leképezést lineáris leképezésnek nevezünk.
- Minden lineáris leképezés megkapható mátrixszal történő balszorzásként.
- Bármely lineáris leképezés egyértelműen megadható egy bázis elemeinek képeivel.
- A báziselemek képei meghatározzák a lineáris leképezés mátrixát.
- Lineáris leképezések egymásutánja (kompozíciója) szintén lineáris leképezés.
- A kompozícióként kapott lineáris leképezés mátrixa az összekomponált lineáris leképezések mátrixainak szorzata.
- Az $\mathbb{R}^2$-beli origó körüli forgatás lineáris leképezés. Forgatások kompozíciója forgatás, a leképezés mátrixának felírásából pedig a trigonometrikus addíciós képletek adódnak.

Tartalomjegyzék