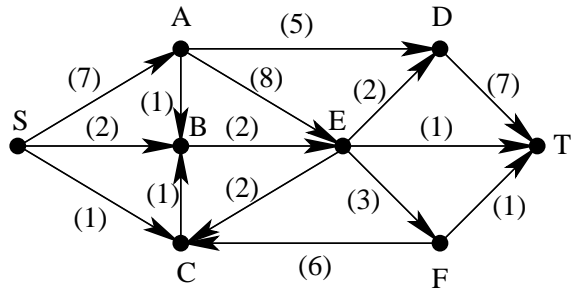


Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok - az ELSŐ zh pótlása
2009. december 3.

1. A G irányítatlan gráf csúcsai legyenek a 101-nél kisebb pozitív egész számok. Két különböző csúcs, x és y , akkor legyen összekötve, ha $x \cdot y$ osztható négygyel. Van-e G -ben Hamilton-út?
2. A G egyszerű, irányítatlan gráfról tudjuk, hogy nincsen benne 16-nál nagyobb fokszámú csúcs. Valaki kiszínezte a gráf 2009 darab csúcsát pirosra úgy, hogy piros csúcsok között nincs él. Bizonyítsa be, hogy ki lehet színezni a többi csúcsot úgy, hogy minden él különböző színű csúcsokat kössön össze és összesen (a pirossal együtt) legfeljebb 17 színt használjunk. (A pirosra színezett csúcsoknak természetesen pirosaknak kell maradniuk, de a piros színt használhatjuk más csúcsoknál is.)
3. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8 -as sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos, ha az egyik mező pontosan 5 lépésben elérhető a másik mezőről. Itt egy lépés alatt azt értjük, hogy függőlegesen vagy vízszintesen haladhatunk egy mezőt, átlósan lépni nem szabad. Mennyi a gráf kromatikus száma?
4. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8 -as sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos, ha az egyik mezőről *bástyával* egy lépésben elérhető a másik. Mennyi $\tau(G)$ értéke? (A bástya függőlegesen vagy vízszintesen tud lépni, egy lépésben tetszőlegesen sokat.)
5. A G gráf a $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$ csúcshalmazon úgy készül, hogy az $\{1, 2, \dots, 50\}$ csúcsokon berajzolunk egy 50 csúcsú teljes gráfot, az $\{51, 52, \dots, 100\}$ csúcsokon is berajzolunk egy 50 csúcsú teljes gráfot, továbbá összekötjük még i -t j -vel, ha $j = i + 50$. Mennyi ennek a gráfnak az élkromatikus száma?
6. Igaz-e, hogy az alábbi hálózatban $(S, A, B, C, E, F), (D, T)$ egy minimális értékű vágás?



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztá eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok - az MÁSODIK zh pótlása
2009. december 3.

1. Legyen G k -szorosán élösszefüggő egyszerű, legalább két csúcsú irányítatlan gráf. Készítsük el a G_1 gráfot úgy, hogy lerajzoljuk G -t két példányban, felveszünk egy új csúcsot és ezt összekötjük mindkét G gráf-példány minden csúcsával. (Tehát így egy n csúcsú, e élű G gráfból kaptunk egy $2n + 1$ csúcsú, $2e + 2n$ élű G_1 gráfot.) Bizonyítsuk be, hogy G_1 $(k + 1)$ -szeresen élösszefüggő!

2. a) Hány 71-nél kisebb, pozitív egész x szám van, melyre

$$30x \equiv 20 \pmod{35}?$$

b) Adja meg a fenti kongruencia legnagyobb kétjegyű megoldását!

3. A Téalpó narancsot csomagol, 100 darab kerül mindegyik zsákba, kivéve az utolsóba, azt már nem tudja teljesen megtölteni. Mennyi jut ebbe az utolsó zsákba, ha összesen $41^{39^{38}}$ darab narancsa volt?

4. Legyen b tetszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsa be, hogy az $1 + kb$ ($k \geq 1$ egész szám) alakú számokból álló végtelen számtani sorozatban nem lehet minden szám prím.

5. Tudjuk, hogy G csoport a $*$ műveletre nézve. Tekintsük az alábbi H halmazt:

$H = \{(g, 0), (g, 1) \mid g \in G\}$ (vagyis H elemei olyan párok, melyek első tagja egy G -beli elem, második tagja pedig 0 vagy 1) és értelmezzük H -n az alábbi függvényt:

$(g_1, i) \diamond (g_2, j) = (g_1 * g_2, i + j \pmod{2})$. (Itt $i + j \pmod{2}$ az i és j összegének 2-vel vett osztási maradékát jelöli.)

Bizonyítsa be, hogy H csoport a \diamond függvénnyel.

6. Az S halmazon értelmezett $*$ művelet olyan, hogy

(i) S -ben van egységelem $*$ -ra nézve és

(ii) tetszőleges (nem feltétlenül különböző) $a, b, c \in S$ elemekre fennáll hogy $a * (b * c) = b * (a * c)$.

Bizonyítsa be, hogy ekkor

(a) $*$ kommutatív, (b) $*$ asszociatív.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.