

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok

2009. november 16.

1. A G k -szorosán pontösszefüggő irányítatlan gráfban kijelöltünk két csúshalmazt, X -et és Y -t, úgy, hogy $X \cap Y = \emptyset$, $|X| \geq k$ és $|Y| \geq k$. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van k darab különböző x_1, \dots, x_k csúcs X -ben és k darab különböző y_1, \dots, y_k csúcs Y -ban, úgy hogy G -ben van út x_i -ből y_i -be és ez a k darab út páronként pontdiszjunkt!

2. Bizonyítsa be, hogy a $2 \cdot d(n^2) = 3 \cdot d(n)$ egyenlőség akkor és csak akkor igaz egy $n \geq 2$ egész számra, ha n prím.

3. Egy n egész szám 76-szorosa 24 maradékot ad 50-nel osztva. Mi lehet az n szám utolsó két számjegye? (Ha több lehetőség van, akkor az összeset adja meg.)

4. Hány 1111-nél nem nagyobb pozitív egész x szám van, melyre igaz, hogy $x^{1111} \equiv 1 \pmod{11}$?

5. Tekintsük a $H = \{3 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ halmazon az alábbi függvényt: $(3 \cdot k) * (3 \cdot l) = 3 \cdot k \cdot l$. (Tehát például $6 \cdot 12 = (3 \cdot 2) * (3 \cdot 4) = (3 \cdot 2 \cdot 4) = 24$.)

a) Igaz-e, hogy H félcsoportot alkot $*$ -ra nézve?

b) Igaz-e, hogy H csoportot alkot $*$ -ra nézve ?

6. Legyen G csoport a $*$ műveletre nézve és legyenek $a, b, c \in G$ tetszőleges (nem feltétlenül különböző) csoportelemek. Igaz-e, hogy a

a) $c * a * c = c * b * c$ egyenlőségből következik $a = b$?

b) $a * c = c * b$ egyenlőségből következik $a = b$?

Ha azt gondolja, hogy az állítás igaz, akkor bizonyítsa be, ellenkező esetben pedig adjon ellenpéldát!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.