Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató az ELSŐ pótzhhoz
2009. december 3.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A G irányítatlan gráf csúcsai legyenek a 101-nél kisebb pozitív egész számok. Két csúcs, x és y, akkor legyen összekötve, ha $x \cdot y$ osztható néggyel. Van-e G-ben Hamilton-út?

* * * * *

Az, hogy a G gráfban van-e él x és y között, csak x és y néggyel vett osztási maradékától függ. (1 pont)
A gráf a következőképpen néz ki: a 4-gyel osztható számok mindenkivel össze vannak kötve, az ilyen éleken kívül pedig él csak páros, de néggyel nem osztható számok között van. (2 pont)
Ha elhagyom a gráfból a 4-gyel osztható számokat (ezekből van 25 darab), (1 pont)
akkor a maradék gráf 51 komponensből fog állni, mert a páros, de 4-gyel nem osztható számok egy 25 csúcsú teljes gráfot alkotnak és lesz még 50 darab izolált páratlan szám. (2 pont)
Ha lenne Hamilton-út a gráfban, akkor a tanult szükséges feltétel szerint max. 26 részre eshetne szét a gráf 25 csúcs elhagyásával, (2 pont)
így ebben a gráfban biztosan nincs Hamilton-út. (2 pont)

2. A G egyszerű, irányítatlan gráfról tudjuk, hogy nincsen benne 16-nál nagyobb fokszámú csúcs. Valaki kiszínezte a gráf 2009 darab csúcsát pirosra úgy, hogy piros csúcsok között nincs él. Bizonyítsa be, hogy ki lehet színezni a többi csúcsot úgy, hogy minden él különböző színű csúcsokat kössön össze és összesen (a pirossal együtt) legfeljebb 17 színt használjunk.

(A pirosra színezett csúcsoknak természetesen pirosaknak kell maradniuk, de a piros színt használhatjuk más csúcsoknál is.)

* * * * *

Soroljuk fel G csúcsait úgy, hogy először jöjjenek a már kiszínezett csúcsok tetszőleges sorrendben, utána pedig a maradék csúcsok tetszőleges sorrendben. (3 pont)
Tekintsünk minden csúcsot színtelennek, legyen az első szín a piros és futtassuk le a mohó színezési algoritmust erre a pontsorrendre. (2 pont)
Mivel lehetséges volt kiszínezni az első 2009 csúcsot mind pirosra (vagyis ezek között nincs él), ezért a mohó algoritmus sem választ új színt ezen csúcsok színezésekor. (Azt csak akkor tenné, ha az éppen kiszínezendő csúcsnak volna első színű szomszédja.) (2 pont)
Tehát a mohó színezés ebben a sorrendben végrehajtva pirosra színezi azokat a csúcsokat, amiknek pirosnak kell lenniük. (1 pont)
Folytatva a többi csúcs színezését a mohó színezés az órán tanult bizonyítás szerint biztosan nem használ $\Delta + 1$-nél (jelen esetben ez 17) több színt és így kiszínezi az egész gráfot jól, tehát ez (a mohó színezés ebben a speciális pontsorrendben) egy kívánt tulajdonságú színezés lesz. (2 pont)

3. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos, ha az egyik mező pontosan 5 lépésben elérhető a másik mezőről. Itt egy lépés alatt azt értjük, hogy függőlegesen vagy vízszintesen haladhatunk egy mezőt, átlósan lépni nem szabad. Mennyi a gráf kromatikus száma?

* * * * *

Ha két csúcs szomszédos a G gráfban, akkor biztosan különböző színű mezőkhöz tartoznak (egyik fekete, másik fehér), (3 pont)
hiszen egy lépés során mindig színt váltunk, 5 lépés alatt 5-ször váltunk színt, vagyis a végén ellenkező színű mezőre kell érkeznünk. (3 pont)
Mivel azonos színű mezők között nincs él, ezért a G gráf két színnel színezhető, a két színosztály a fekete és fehér mezőkből áll. (3 pont)
Egy színnel G nem színezhető, mert van éle, tehát G kromatikus száma 2. (1 pont)

4. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos, ha az egyik mezőről *bástyával* egy lépésben elérhető a másik. Mennyi $\tau(G)$, a lefogó pontok minimális száma G-ben? (A bástya függőleges vagy vízszintesen tud lépni, egy lépésben tetszőlegesen sokat.)

* * * * *

A G gráf olyan, hogy két csúcs között pontosan akkor van él, ha azok egy sorban vagy egy oszlopban vannak. (1 pont)
Határozzuk meg először $\alpha(G)$-t, ebből $\tau(G) = 64 - \alpha(G)$ Gallai tétele miatt. (2 pont)
$\alpha(G) \leq 8$, mert minden sorból legfeljebb egy csúcs választható be egy független ponthalmazba, hiszen egy sor mezői egy 8 csúcsú teljes gráfot alkotnak. (3 pont)
$\alpha(G) \geq 8$, mert tudok mutatni egy 8 elemű független ponthalmazt: a tábla átlóját. (3 pont)
Tehát $\alpha(G) = 8$, vagyis $\tau(G) = 56$. (1 pont)

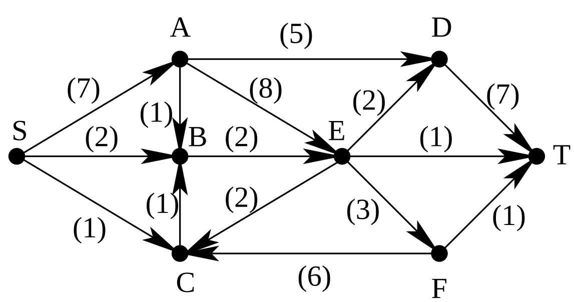
Másik megoldás:
A G gráf olyan, hogy két csúcs között pontosan akkor van él, ha azok egy sorban vagy egy oszlopban vannak. (1 pont)
$\tau(G) \geq 56$, mert egy lefogó ponthalmazban egyik sorból sem maradhat ki két mező, (3 pont)
hiszen ekkor az ezen két csúcs közti él nem lenne lefogva. (1 pont)
$\tau(G) \leq 56$, mert tudok mutatni egy 56 elemű lefogó ponthalmazt: az összes mező, kivéve az átló kockái. (3 pont)
Ez valóban lefogó, mert a kimaradó csúcsok (az átló mezői) között nincsen él. (1 pont)
Tehát $\tau(G) = 56$. (1 pont)

5. A G gráf a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon úgy készül, hogy az $\{1, 2, \ldots, 50\}$ csúcsokon berajzolunk egy 50 csúcsú teljes gráfot, az $\{51, 52, \ldots, 100\}$ csúcsokon is berajzolunk egy 50 csúcsú teljes gráfot, továbbá összekötjük még i-t j-vel, ha $j = i + 50$. Mennyi ennek a gráfnak az élkromatikus száma?

* * * * *

Mivel a gráf egyszerű, ezért Vizing-tétele és az alsó becslés miatt az élkromatikus száma vagy Δ vagy $\Delta + 1$. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy G élei kiszínezhető $\Delta = 50$ színnel, tehát az élkromatikus szám 50 lesz. (1 pont)
Színezzük ki az első teljes gráf éleit 50 színnel (ez Vizing-tétele miatt megtehető, mert ezen a feszített részen belül a max. fokszám 49). Színezzük ki ugyanígy a másik teljes gráf éleit: a második teljes gráf k és l között menő éle kapja ugyanazt színt, amit az első teljes gráfban a $k - 50$ és $l - 50$ között futó él kapott. (3 pont)
Eddig összesen 50 színt használtunk, mégpedig úgy, hogy minden csúcsnál pontosan egyet nem használtunk eddig (hiszen minden csúcsra 49 él illeszkedik a teljes gráfokban).(2 pont)
Igaz továbbá az is (a második teljes gráf ügyes színezése miatt), hogy i-nél és $50 + i$-nél ugyanaz a szín maradt ki. (2 pont)
Az i és $50 + i$ között futó élet színezhetjük tehát ezzel a közös kimaradt színnel, így a gráf összes élét kiszíneztük 50 színnel. (1 pont)

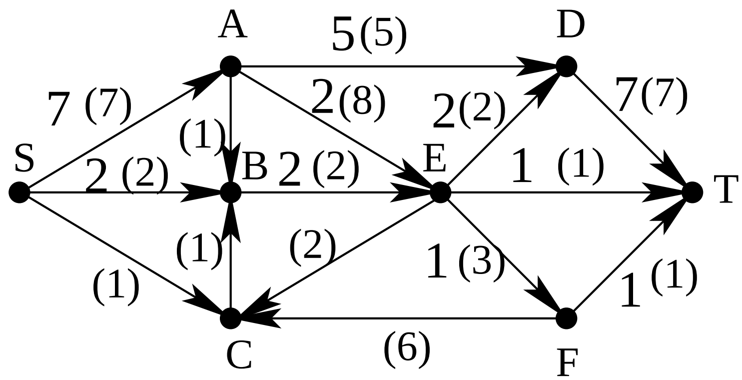
6. Igaz-e, hogy az alábbi hálózatban (S, A, B, C, E, F), (D, T) egy minimális értékű vágás?



* * * * *

Az (S, A, B, C, E, F), (D, T) vágás értéke 9. (2 pont)

A hálózatban található 9 értékű folyam, ilyet mutat az alábbi ábra: (4 pont)



Mivel a talált folyam értéke megegyezik az (S, A, B, C, E, F), (D, T) vágás értékével, ezért a folyam maximális, az (S, A, B, C, E, F), (D, T) vágás pedig minimális. (4 pont)

A talált folyam maximalitását természetesen be lehet úgy is látni, hogy a felrajzolt segédgráfban már nincs él S-ből T-be. Ekkor a folyam maximalitásának ilyetén való belátása: (2 pont)
annak felismerése pedig, hogy a vizsgált vágás minimális, mert értéke megegyezik egy folyam értékével: (2 pont)