Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2009. október 22.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A G irányítatlan gráf csúcsai legyenek a 301-nél kisebb pozitív egész számok. Két csúcs, x és y, akkor legyen összekötve, ha sem $x-y$, sem $x+y$ nem osztható hárommal. Van-e G-ben Euler-út?

* * * * *

Az, hogy a G gráfban van-e él egy x és y csúcspár között, csak x és y hárommal vett osztási maradékától függ. (1 pont)
Azonos maradékot adó számok között soha nincsen él, hiszen ilyenkor a különbségük osztható hárommal. (1 pont)
Különböző maradékot adó számok között pedig pontosan akkor van él, ha az egyik szám osztható hárommal. (1 pont)
Vagyis a gráf egy teljes páros gráf, melynek egyik pontosztályában a hárommal osztható, másik pontosztályában a hárommal nem osztható számok vannak, azaz az egyik osztály 100, a másik osztály 200 csúcsból áll. (1 pont)
Mivel minden fokszám páros, ezért teljesül az Euler-útra vonatkozó feltétel első része. (3 pont)
Azt kell még meggondolni, hogy a G gráf összefüggő, ekkor a tétel értelmében következik, hogy van Euler-út. (1 pont)
Mivel G teljes páros gráf, ezért két különböző osztálybeli csúcs között van él, két azonos osztálybeli csúcs között pedig van 2 hosszú út, vagyis a gráf összefüggő, tehát kész vagyunk. (2 pont)

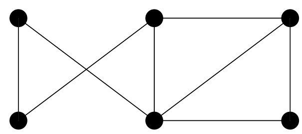
2. A G egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráfról annyit tudunk, hogy kromatikus száma 2009. Bizonyítsa be, hogy van olyan 2009 színnel való színezése G-nek, amiben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak és az így kiszínezett gráf tartalmaz 2009 csúcsból álló olyan utat, melyben mind a 2009 szín szerepel.

* * * * *

Mivel G kromatikus száma 2009, G-nek van jó színezése 2009 színnel, tehát olyan színezése, ahol szomszédos csúcsok színe különböző. Ezt a színezést fogjuk úgy alakítani, hogy végig jó színezés maradjon és a legvégén legyen benne kívánt tulajdonságú út. (1 pont)
Számozzuk meg a színeket és vegyük sorra a kiszínezett gráf csúcsait, úgy, hogy először az 1. színnel színezettek jönnek valamilyen tetszőleges sorrendben, aztán a 2. színnel színezettek, stb., végül a 2009. színnel színezettek. Amikor egy csúcshoz elérünk, megvizsgáljuk, hogy melyik az a legkisebb sorszámú szín az övénél kisebb sorszámúak közül, amelyikből nincsen szomszédja az aktuális színezésben, majd

átszínezzük őt erre a színre. Ha nincs ilyen szín, akkor megtartjuk az eddigi színét. Ezt megtesszük sorban az összes csúcsra. (3 pont)
Az eljárás során végig jó színezésünk van, mert az elején ilyen volt a színezés és közben sose színezünk senkit olyan színre, amilyen szomszédja van. (1 pont)
A színosztályok száma nem csökkenhet az eljárás során (nem tűnhet el szín), mert akkor 2009-nél kisebb lenne a gráf kromatikus száma. (1 pont)
Az eljárás végén az is teljesül, hogy minden i. színnel ($i \geq 2$) színezett csúcsnak van szomszédja minden i-nél kisebb színű osztályban. Ez azért igaz, mert ez volt a helyzet akkor, amikor az ő vizsgálata végetért és később már senki sem került ki a nála kisebb színosztályokból. (2 pont)
Tekintsük most azt a színezést, amit az eljárás végén kaptunk. Ebben biztosan van 2009. színnel színezett csúcs, mert szín nem tűnt el. Ennek a csúcsnak (a fentiek miatt) biztosan van 2008. színnel színezett szomszédja, ennek a szomszédnak van 2007. színnel színezett szomszédja, stb., így kapunk egy 2009 hosszú utat, melynek l. csúcsa a színezésben a $2009 - l + 1$. színt kapta, vagyis benne az összes szín pontosan egyszer szerepel. (2 pont)

3. Perfekt-e az alábbi gráf?



* * * * *

A G gráfban van háromszög, de nincs négyes klikk, azaz G klikkszáma 3. (1 pont)
A gráf nem színezhető 2 színnel, mert nem páros, hiszen van benne 3 hosszú kör. (1 pont)
3 színnel viszont színezhető, ezt mutatja egy adott színezés. (1 pont)
Tehát a G gráfra magára teljesül, hogy $\omega(G) = \chi(G)$ (1 pont)
Meg kell még ezt nézni minden feszített részgráfjára is. (1 pont)
Ha egy G' feszített részgráfban van háromszög, akkor $\omega(G') = 3$ és nyilván $\chi(G') = 3$, hiszen már G is színezhető volt 3 színnel. (1 pont)
Ha G'-ben nincs háromszög, akkor az egy páros gráf, mert páratlan hosszú kör öt hosszú lehetne még benne, de olyan csak akkor lehetne, ha 1 csúcsot hagytunk csak el és az is a jobb alsó csúcs volt. Ekkor azonban maradt háromszög is. (2 pont)
A páros gráfok viszont perfektek, tehát ekkor G'-re is teljesül, hogy $\omega(G') = \chi(G')$. (2 pont)

Másik megoldás:

Tudjuk, hogy a G gráf pontosan akkor perfekt, ha G nem tartalmaz sem legalább 5 hosszú páratlan kört, sem ilyennek a komplementerét feszített részgráfként. (3 pont)
G-ben 7 vagy ennél hosszabb kör nem lehet, ezért csak azt kell megnézni, hogy van-e G-ben feszített részgráfként 5 hosszú kör vagy ennek komplementere. (3 pont)
G-ben öt hosszú kör nincsen feszített részgráfként, mert az egyetlen öt hosszú kör (jobb alsó csúcs kimarad) tartalmaz húrt. (2 pont)
Az öt hosszú kör komplementere szintén egy öt hosszú kör, vagyis ezt már kizártuk az előbb. (2 pont)

(Ennél a megoldásnál nem jár az első 3 pont annak, aki a tételt semmire nem használja, semmi további érdemi lépést nem tesz a megoldás felé.)

4. Legyen G egy olyan egyszerű, $2n$ csúcsú gráf, amelyben a minimális fokszám n. Bizonyítsa be, hogy $\tau(G) \geq n$, ahol $\tau(G)$ a G-beli lefogó pontok minimális számát jelöli!

* * * * *

Mivel minden fokszám legalább a csúcsszám fele, ezért Dirac tétele alkalmazhtaó, vagyis G-ben van Hamilton-kör. (3 pont)
Ennek a Hamilton-kör minden második élét véve egy teljes párosítást kapunk, mert a csúcsszám páros. (3 pont)

Tehát $\nu(G) \geq n$. (1 pont)
Ismert, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, ezért $\tau(G) \geq n$ is teljesül. (3 pont)

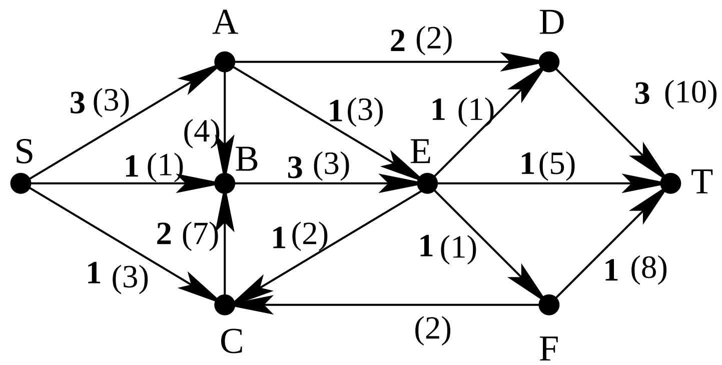
Egy másik lehetséges befejezés onnan, hogy már tudjuk, hogy G-ben van Hamilton-kör:
Mivel van Hamilton-kör, ezért egy független csúcshalmaz legfeljebb n csúcsból állhat, hiszen a körön legfeljebb minden második csúcsot vehetek bele. (3 pont)
Vagyis $\alpha(G) \leq n$. (1 pont)
Tudjuk, hogy $\alpha(G) + \tau(G) = 2n$. (2 pont)
Ezért $\tau(G) \geq n$. (1 pont)

5. Egy jótündérnek 20 féle színű üveggolyója van, mindegyik színből 5 darab. Valahogyan kiosztja ezt a 100 golyót 20 Hupikék Törpikének, mindegyik törp ugyanannyit kap, Törpapának nem jut golyó. Bizonyítsuk be, hogy Törpapa el tud kérni a 20 törp mindegyikétől egy-egy golyót úgy, hogy 20 különböző színű golyója legyen!

* * * * *

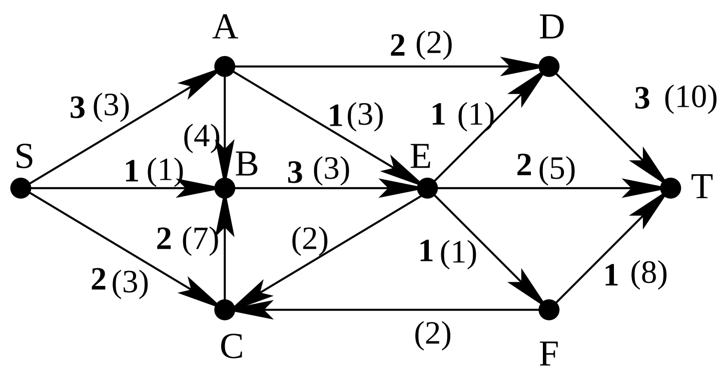
Egy páros gráfot konstruálunk a feladatból. Az egyik osztályban a 20 törp van, akik a golyókat kapták, a másik osztályban a 20 lehetséges szín és akkor van él egy törp és egy szín között, ha az adott törp kapott legalább egy olyan színű golyót. (2 pont)
Ha ebben a páros gráfban van teljes párosítás, akkor Törpapa tud jól választani: mindegyik törptől olyan színű golyót kér el, amilyet a teljes párosítás a törphöz rendelt. (2 pont)
Mivel a két pontosztályban ugyanannyi csúcs van, ezért csak a Hall-feltételt kell leellenőrizni. (1 pont)
Ez most azt jelenti, hogy meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges i darab színt vizsgálva, nem lehetséges, hogy az összes ilyen színű golyót j darab, $j < i$ törp birtokolja. (2 pont)
Ez viszont igaz, mert i darab színből összesen $5i$ golyó van, de j darab törpnél, csak $5j < 5i$ darab golyó lehet. (3 pont)

6. Tekintsük a vastag számokkal megadott folyamot az alábbi hálózatban. Maximális-e ez a folyam? Adjon meg egy minimális vágást a hálózatban (és bizonyítsa is be róla, hogy minimális)!



* * * * *

Az alábbi folyam nagyobb értékű, tehát a feladatbeli folyam nem volt maximális. (5 pont)



(Az is 5 pontot ér, ha valaki felrajzolja jól a segédgráfot és megmutatja, hogy abban van irányított út S-ből T-be.)

Ha azt a vágást tekintjük, ahol S-sel egy osztályban csak a B és C csúcsok vannak, akkor ennek a vágásnak a kapacitása 6 lesz, mert csak az SA és BE élek lépnek ki. (3 pont)

Mivel van 6 értékű folyam (ha az előbb nem mutattunk ilyet, akkor most kell), ezért ez egy minimális vágás. (2 pont)