Bevezetés a számításelméletbe 2.

BSz2+ Pontozási útmutató - 2016/17/1

Első ZH - 2016. október 14.

1. feladat

Margit néni tíz héten keresztül ötöslottózik, minden héten egy szelvénnyel. (Az ötöslottóban egy szelvényen 1 és 90 között 5 különböző számot kell beikszelni.) Hányféleképpen töltheti ki a szelvényeket, ha a négy kedvenc száma közül minden héten legalább kettőt bejelöl, de azt nem bánja, ha különböző heteken esetleg ugyanaz a kitöltés szerepel a szelvényeken?

Megoldás

1 héten a kitöltési lehetőségek:

- 2 kedvenc: $\binom{4}{2}\binom{86}{3}$ 4-ből kiválasztja a két kedvencet, majd a maradék 86-ból kiválasztja a további három számot. (2)
- 3 kedvenc: $\binom{4}{3}\binom{86}{2}$ (2)
- 4 kedvenc: $\binom{4}{4}\binom{86}{1}$ (2)

Legyen ez összesen X: $X = \binom{4}{2}\binom{86}{3}+\binom{4}{3}\binom{86}{2}+\binom{4}{4}\binom{86}{1}$, azaz egy héten X kitöltési lehetőség van. (1)

Mivel tíz héten keresztül lottózik, minden héten X kitöltési lehetősége van, így összesen X^{10} kitöltési lehetőség van. (3)

$$X^{10} = \left(\binom{4}{2}\binom{86}{3}+\binom{4}{3}\binom{86}{2}+\binom{4}{4}\binom{86}{1}\right)^{10}$$

Pusztán a teljesség kedvéért:

$$X^{10} = (\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{86\cdot 85\cdot 84}{3\cdot 2}+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}\cdot\frac{86\cdot 85}{2}+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{86}{1}=$$

$$= 86\cdot 85\cdot 84+86\cdot 85\cdot 2+86)^{10} = 628746^{10}$$

2. feladat

Egy fában a kétféle előforduló fokszám közül az egyik az 5, és ez tízzel kevesebb csúcsnál fordul elő, mint a másik. Hány csúcsa van a fának?

Megoldás

Mivel minden fában van legalább egy 1 fokú pont, a másik fokszám az 1. (2)

Legyen n csúcsú a gráf, ekkor 5 fokú pont $\frac{n}{2} - 5$ és 1 fokú $\frac{n}{2} + 5$ van. (1)

A tanultak alapján $\sum d(v) = 2e = 5\left(\frac{n}{2} - 5\right) + 1\left(\frac{n}{2} + 5\right)$ (1)

A fákra vonatkozó összefüggésből: $e = n - 1$ (1)

Ekkor az egyenlet: $5\left(\frac{n}{2} - 5\right) + 1\left(\frac{n}{2} + 5\right) = 2(n-1)$ (2)

$$\frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n - 2n = 5 \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 2 \quad (2)$$

$$n = 18 \quad (1)$$

Azaz 18 csúcsa van a fának.

3. feladat

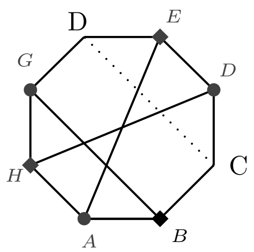
Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?

Megoldás

A Kuratowski-tétel kimondja, hogy ha találunk a gráfban K_5-öt, vagy $K_{3,3}$-at, akkor a gráf nem síkbarajzolható. (3)

Az alábbi ábrán a $\overline{CD}$ élt elhagyjuk, majd a C és D csúcsokat a tanult módon éllé alakítjuk.

Ekkor a B, E, H és a A, D, G csoportok $K_{3,3}$-at alkotnak. (7)



4. feladat

Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to R$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben e az egyetlen maximális súlyú él. Lehetséges-e, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája is, ami tartalmazza e-t és olyan is, ami nem? (Ha igen, akkor mutassunk példát, ha nem, akkor bizonyítsuk ez be.)

Megoldás

Be fogjuk látni, hogy nincs ilyen G gráf.

Ha a maximális súlyú e él benne van a feszítőfában, akkor nincs őt tartalmazó kör, (3)

a Kruskal algoritmus miatt. (2)

De ekkor minden feszítőfa tartalmazni fogja e-t, (2)

mert e-t elhagyva nem marad összefüggő a gráf. (2)

Következésképpen nem lehetséges a feladat állítása (1)

5. feladat

Hány élből áll a leghosszabb séta K_{10}-ben, a tízpontú teljes gráfban? (A séta olyan élsorozat, amelyben az élek nem ismétlődhetnek.)

Megoldás

Legjobb esetben az összes élet tartalmazza a leghosszabb séta.

Az összes élt tartalmazó élet Euler-sétának hívjuk. (1)

Az Euler-sétáról ismeretes, hogy 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van. (2)

A K_{10}-ben minden csúcs össze van kötve mindegyikkel, azaz 9 másikkal. Így minden pont foka 9, (1)

azaz 10 páratlan fokú pont van a gráfban. (1)

Egy sétának egy kezdő és egy végpontja van, minden más pontjába ugyanannyiszor megyünk be, mint ahányszor ki, így minden más pont foka páros. Vagyis, ahhoz, hogy Euler-sétát kaphassunk a G egy részgráfjában és így leghosszabb sétát találjunk az eredeti G-ben, 8 csúcsnak 1-1 fokát el kell hagyni, azaz legalább 4 élet. (2)

Ha 4 páronként nem szomszédos élet hagyunk el (K_{10}-ben van ilyen), akkor mindegyik mindkét vége különböző pont, azaz 8 pont fokát 8-ra redukáljuk.

Ekkor a keletkezett részgráfra teljesül az Euler-séta létezésére adott elégséges (és szükséges) feltétel, a részgráf minden éle bejárható Euler-sétával. (2)

A séta hossza: $|E(K_{10})| - 4 = \binom{10}{2} - 4 = 41$ (1)

6. feladat

Elhelyezhetők-e egy kör kerületén az $1, 2, \ldots, 15$ számok úgy, hogy bármely két szomszédos szám különbsége abszolút értékben legalább 4 és legfeljebb 7 legyen?

Megoldás

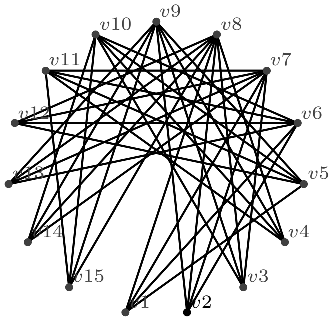
Fogalmazzuk meg a feladatot a gráfelmélet eszközeivel!

Legyen G (egyszerű) gráf: (1)

- $V(G)$ (G csúcsai): Az $1, 2, \ldots, 15$ számok. (1)
- $E(G)$ (G élei): Két csúcs között akkor húzunk be élt, ha a két szám különbségének abszolútértéke legalább 4 és legfeljebb 7. (1)

A feladatunk a fenti gráfban Hamilton-kört keresni. (1)

A feladat megértésének segítségére álljon itt a gráf (a megoldáshoz nem szükséges ábrázolni):



A gráfból 7 pontot elhagyva 8 komponensre esik szét. Ha a gráfból elhagyjuk a $5, 6, \dots, 11$ csúcsokat, akkor 8 izolált pont keletkezik, nevezetesen a $1, 2, 3, 4$ és a $12, 13, 14, 15$ pontok, ezek között nem fut él. (4)

A Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel ekkor nem teljesül, tehát a gráfban nincs Hamilton kör. (1)

Tehát nem helyezhető el a kör kerületén a 15 szám. (1)