

1. 7 lány (A,B, ..., G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házasulandó korbá egy indián törzsben. A törzsfőnök most minden fiúnak szeretne feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

a) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

	A	B	C	D	E	F	G
1		♥				♥	
2	♥	♥	♥	♥	♥		♥
3		♥			♥	♥	
4	♥		♥	♥		♥	♥
5					♥	♥	♥
6		♥			♥		

(<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;">0</td></tr> </table>	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0)
0	0	1	0	0	1	0	1																																																											
0	1	0	0	0	1	0	1																																																											
1	0	1	1	1	1	0	1																																																											
0	1	1	0	0	0	0	0																																																											
0	0	1	1	1	1	1	1																																																											
0	1	0	0	0	1	0	0																																																											
1	0	1	1	0	1	1	1																																																											
0	1	1	0	0	1	0	0																																																											

2. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a fent jobbra látható mátrix i . sorának j . eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G -ben B -t fedő párosítás. (ZH, 2014. október 27.)

3. A sakktáblán taláalomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

4. Valaki taláalomra szétoztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

5. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

6. Egy táncmulatságon 25 fiú és 25 lány van jelen. Minden lány ismer legalább 13 fiút, és minden fiú ismer legalább 13 lányt. Mutassuk meg, hogy tudnak mindnyájan egyszerre táncolni egy páros táncot úgy, hogy mindenki ismerőssel táncol.

7. 2035-ben a VIK-es gólyabálon 601 lány és 601 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze lehet-e állítani 601 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök? (ZH, 2017. május 8.)

8. Egy tíznapos üdülés szervezője az üdülés mind a tíz napjára felajánl tizenhat lehetséges program közül pontosan ötöt. Ugyanazt a programot soha nem ajánlja fel két egymást követő napra. Mutassuk meg, hogy biztosan kiválasztható minden napra az aznapra felajánlott programok egyike úgy, hogy a tíz napra tíz különböző programot válasszunk ki. (ZH, 2010. május 18.)

9. A VIK-es gólyabálon 12 lány és 198 fiú vesz részt. A szervezők így 12 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Minden lány legalább 11 fiút ismer, a fiúk közül viszont mindenki legfeljebb 11 lányt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 12 párt? (ZH, 2017. április 20.)

10. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás. (ZH, 2015. május 4.)