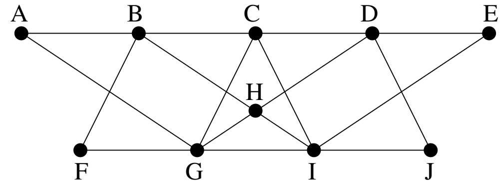
B e v e z e t é s a S z á m í t á s e l m é l e t b e I I .

Hetedik gyakorlat, 2017. október 26.



1. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét a jobbra látható G gráfra és adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt.

2. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 60\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$, vagyis a G-beli független élek maximális számának értékét. (ZH, 2009. március 23.)

3. a) Legyen M egy maximális párosítás a G egyszerű gráfban és álljon az X csúcshalmaz az M-beli élek végpontjaiból. Bizonyítsuk be, hogy X lefogó ponthalmaz.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.

4. a) A $2n$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

b) A $2k+1$ pontú, egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k+1$. Mennyi $\nu(G)$, a független élek maximális számának értéke? (ZH, 2003. május 13.)

5. Legyen M egy $n \times n$-es mátrix. Készítsük el M-ből a G páros gráfot a következőképpen: G egyik pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a másik $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$; továbbá minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az M mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem nem nulla. Mutassuk meg, hogy ha $\det M \neq 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

6. 9 lány (A,B, …, I) és 9 fiú (1-től 9-ig) ért házasulandó korba egy indián törzsben. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei az alábbi bal oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök a lehető legtöbb házaspárt szeretné létrehozni. A tanult algoritmust használva oldjuk meg a törzsfőnök feladatát és (a Kőnig-tétel fogalmait használva) adjunk meg olyan bizonyítékot is, ami meggyőzi a törzsfőnököt arról, hogy a megadott párosítás valóban maximális.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	♥		♥	♥			♥	♥	♥
2		♥				♥			
3		♥			♥	♥			♥
4	♥		♥	♥	♥		♥	♥	♥
5		♥			♥				
6					♥	♥			
7	♥	♥			♥	♥	♥		♥
8		♥			♥	♥			
9		♥				♥			

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a fent jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt. (ZH, 2015. április 23.)

8. A $G = (A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{101}\}$. Minden $1 \leq i \leq 101$ és $1 \leq j \leq 101$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha $i \cdot j$ páros. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának, valamit $\rho(G)$, a lefogó élek minimális számának értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt. (ZH, 2016. április 28.)

9. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 3$ és G csúcsainak van olyan 3 színnel való színezése, amelyben az egyik színt csak egyetlen csúcs kapja. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \leq \nu(G) + 1$, ahol $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális számát, $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális számát jelöli). (ZH, 2016. május 9.)