B e v e z e t é s a S z á m í t á s e l m é l e t b e I I .

Ötödik gyakorlat, 2017. október 12.

1. Van-e Hamilton-kör az alábbi G gráfokban? És Hamilton-út?

a) Egy 5×5-ös sakktábla egyik sarkát kivágjuk. A maradék 24 mező alkotja G csúcsait és két különböző csúcs akkor van összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők él mentén szomszédosak. (ZH, 2013. március 21.)

b) Ugyanaz, mint az a) feladat, csak két átellenes sarkot hagyunk el. (ZH, 2013. március 21.)

c) $V(G) = \{1, 2, \dots, 20\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 3-mal vagy 5-tel (vagy mindkettővel). (ZH, 2013. május 16.)

2. A G gráf egy 101 csúcsú „csillag" – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100 fokú és száz 1 fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör? (ZH, 2015. március 19.)

3. Bejárható-e egy 4×4-es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá?

4. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem.

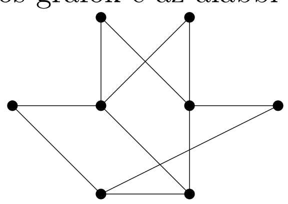
5. G $2k + 1$ pontú egyszerű gráf, minden pontjának foka legalább k. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.

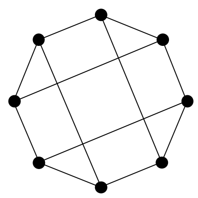
6. A 201 csúcsú G egyszerű gráfban a v csúcs kivételével minden pont foka legalább 101. A v csúcsról csak annyit tudunk, hogy nem izolált pont (vagyis a foka legalább 1). Mutassuk meg, hogy G-ben van Hamilton-út. (ZH, 2016. március 24.)

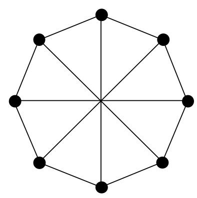
7. A G egyszerű gráfnak $2k + 1$ csúcsa van. Az egyik csúcs foka k, az összes többi csúcs foka legalább $k + 1$. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör. (ZH, 2003. március 27.)

8. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú, 9-reguláris, egyszerű gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-köre. (ZH, 2008. május 22.) (A G gráf *9-reguláris*, ha G-ben minden pont foka 9.)

9. Páros gráfok-e az alábbi gráfok?

a) 

b) 

c) 

10. Létezik-e olyan, legalább 5 csúcsú páros gráf, amelynek a komplementere is páros gráf?

11. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni. (ZH, 2010. március 25.)

12. Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 3, a többi csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van páratlan köre. (ZH, 2017. május 8.)

13. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2017 közé eső természetes számok. Két különböző csúcsot akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

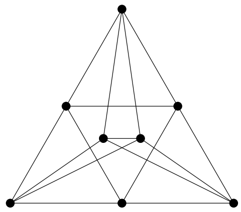
14. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaz. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét. (ZH, 2003. május 22.)

15. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két szám közül az egyik osztója a másiknak. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t. (ZH, 2009. május 20.)

16. Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát. (ZH, 2017. április 20.)

17. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban minden fokszám 8. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát. (ZH, 2015. május 20.)

18. Mennyi az alábbi gráf kromatikus száma?



19. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát. (ZH, 2014. március 20.)

20. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$. Tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legföljebb 10-zel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.

21. A G egyszerű gráfban 2017 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2016. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 2017$.

22. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban van egy 5, egy 4 és egy 3 fokú csúcs, minden más csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráf színezhető 3 színnel. (ZH, 2015. május 20.)