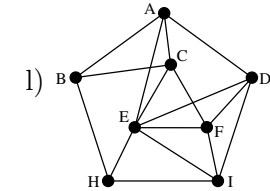
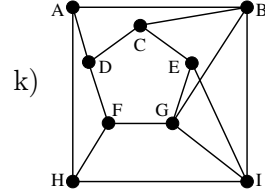
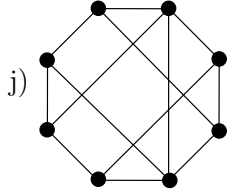
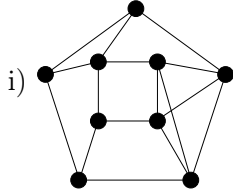
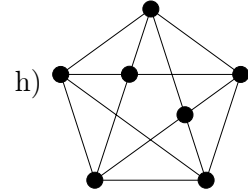
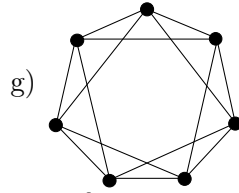
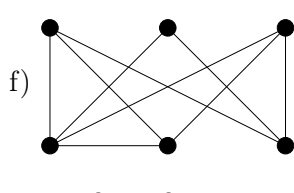
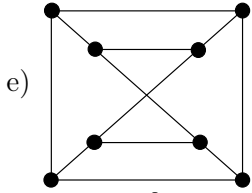
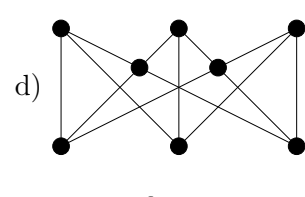
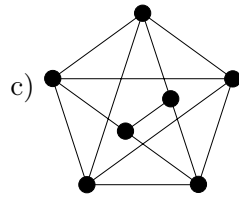
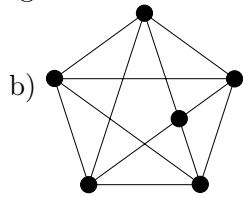
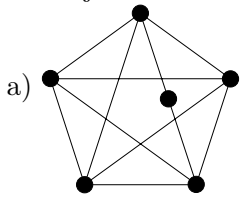


1. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



(ZH, 2015. május 4.)

(ZH, 2016. március 25.)

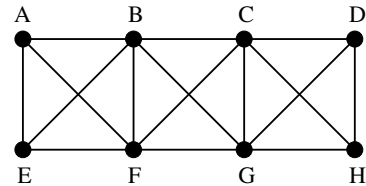
(ZH, 2016. május 9.)

2. A G gráf nem tartalmaz $K_{2,3}$ -mal (2 ház, 3 kút) topologikusan izomorf részgráfot. Következik-e ebből, hogy a gráf síkbarajzolható? (ZH, 2016. május 25.)

3. A G gráfban minden pont foka legfeljebb három. Tudjuk továbbá, hogy G minden köre legfeljebb 5 élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G síkbarajzolható. (ZH, 2006. november 30.)

4. Van-e olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amelyben minden pont foka legalább 6?

5. Maximálisan hány élet lehet hozzávenni a jobbra látható gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk? (Egy él hozzávétele azt jelenti, hogy két meglévő csúcs közé húzunk be új élet, a gráfhoz további csúcsokat hozzávenni tehát nem szabad.) (ZH, 2015. március 19.)



6. a) Legyen G egy 13 pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere közül legalább az egyik nem síkbarajzolható. (ZH, 2005. december 19.)

b) Legyen G egy legfeljebb 6 pontú egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G és a komplementere közül legalább az egyik síkbarajzolható.

7. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást.

8. a) A G egyszerű, síkbarajzolható gráfban minden pont foka legalább 5. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek legalább 12 darab 5 fokú csúcsa van.

b) Igaz-e ez az állítás 12 helyett 13-mal?

9. Van-e olyan síkbarajzolt gráf, amelyben a csúcsok, az élek és a tartományok száma is hárommal osztható? Van-e ugyanilyen tulajdonságokkal összefüggő gráf is?

10. Egy konvex poliédernek (vagyis síklapok által határolt testnek) 20 csúcsa és 12 lapja van. A poliéder minden lapját ugyanannyi él határolja. Mennyi ez a közös érték?

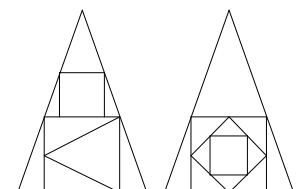
11. Rajzoljunk olyan 2, 3, illetve 4 csúcsú síkbarajzolt gráfot, ami izomorf a saját duálisával.

12. a) Van-e olyan egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráf, aminek kétszer annyi csúcsa van, mint a duálisának?

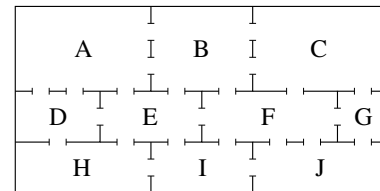
b) Van-e olyan egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?

13. Egy egyszerű, összefüggő, síkbarajzolt gráfnak ugyanannyi csúcsa van, mint a duálisának. Mutassuk meg, hogy a gráfban van három élű kör.

14. Ha lehet, rajzoljuk le az ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.

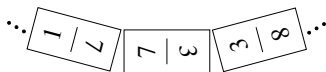


15. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden reggel az A jelű lakosztályából sétára indul a palotában. A fejébe veszi, hogy séta közben minden ajtón pontosan egyszer szeretne átmenni. Ha ez sikerülne neki, a séta végpontját jelölné ki trónteremnek. De mivel sosem sikerül, az udvari bölcs azt tanácsolja, hogy falazzassa be az egyik ajtót. Van-e a palotában olyan ajtó, aminek a befalazása után már létezik a király vágyainak megfelelő séta? Ha igen, melyik szobából lehet a trónterem? (Az ábra a befalazás előtti állapotot mutatja.) (ZH, 2016. március 24.)



16. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges: bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legfőljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legfőljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban? (ZH, 2012. március 12.)

17. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n -ek esetén létezik ilyen elhelyezés. (ZH, 2007. március 29.)



18. A G gráf tartalmaz olyan zárt körsétát, amely G minden élét páratlan sokszor tartalmazza. Igaz-e mindig, hogy ekkor G tartalmaz Euler-körsétát is? (ZH, 2015. május 20.)

19. Egy 20 csúcú egyszerű gráfban minden csúc foka 6. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan egy élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája. (ZH, 2017. május 8.)