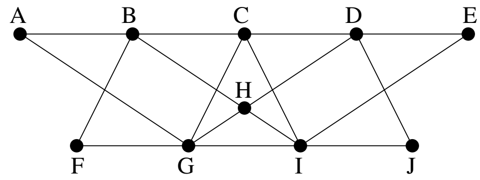
Bevezetés a Számításelméletbe II.

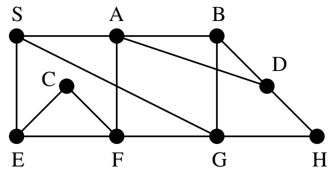
Harmadik gyakorlat, 2017. szeptember 21.

1. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden v csúcsra v távolságát a kezdőponttól és azt a csúcsot, ahonnan az eljárás v-t elérte), és határozzuk meg a keletkező BFS-fát.



a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E
b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J
c) J, D, I, C, E, G, H, A, F, B
d) A, B, G, C, H, F, I, D, E, J

2. a) A BFS algoritmus a jobbra látható ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, □, H, □, F, C, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

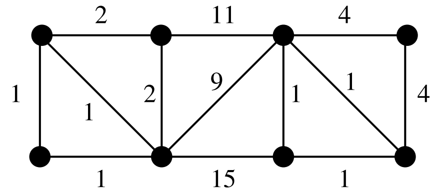


b) Tartalmazhatja-e a {D,H} élet az alábbi gráf egy S-ből indított (tetszőleges) BFS bejárásához tartozó BFS-fája? (ZH, 2015. március 19.)

3. Adott G gráf és s csúcs esetén a feladatunk eldönteni, hogy G-ben van-e s-et tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálni az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét. Módosítsuk a BFS algoritmust úgy, hogy ennek a feladatnak a megoldására is alkalmassá váljon.

4. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára illeszkedőnek, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F. Legföljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik? (ZH, 2015. május 20.)

5. Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.



a) Hány ilyen van?
b) Ezek közül mindegyik megkapható a Kruskal algoritmussal?

6. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \leq i, j \leq 100$, $i \neq j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya 1, ha $i \leq 50$ és $j \leq 50$; legyen az $\{i, j\}$ él súlya 2, ha $i \geq 51$ és $j \geq 51$; végül minden más él súlya legyen 3. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G-ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

7. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t. (ZH, 2015. március 19.)

8. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg,hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t. (ZH, 2015. május 4.)

9. Egy 100 csúcsú G összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak G csúcsaival, de csak G 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll. Határozzuk meg G egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát. (ZH, 2017. március 16.)

10. Egy élsúlyozott, összefüggő G gráfban minden él súlya legföljebb 100. Tudjuk, hogy G-ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élet. Mutassuk meg, hogy ekkor G minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élet.