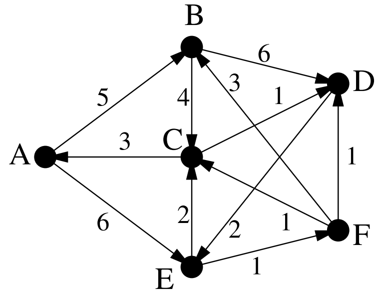
Bevezetés a Számításelméletbe II.
Tizenegyedik gyakorlat, 2017. november 30.

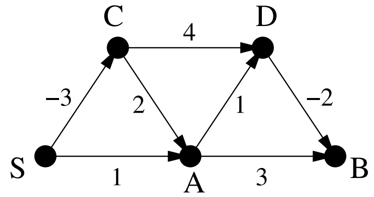
1. a) Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmus segítségével az A csúcsból a többibe vezető legrövidebb utak hosszát a jobbra látható gráfban és adjunk meg egy A-ból D-be vezető legrövidebb utat.

b) Valamely él súlyát 1-gyel csökkentjük. Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az A-tól mért távolságok?

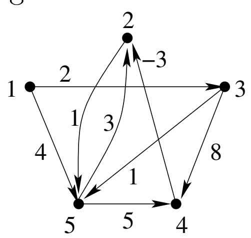
c) Vegyük hozzá a gráfhoz a $B \to E$ élt t élsúllyal. A t mely értékeire változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?



2. Határozzuk meg a Ford-algoritmus segítségével a jobbra látható gráfban az S pontból a többi pontba vezető legrövidebb utak hosszát és adjunk meg egy S-ből B-be vezető legrövidebb utat. Az algoritmus futtatásakor az éleket ábécé szerint növekvően sorszámozzuk: $A \to B$, $A \to D$, $\ldots$, $S \to C$.



3. Az alábbi gráfon a Floyd-algoritmust futtatjuk. Az algoritmus során (a 4. javítási menet végén) az A_4 táblázat tartalmazza az ismert úthosszakat. Hogyan változik a táblázat, amikor minden csúcspárra újra elvégezzük a frissítést?



$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 10 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 5 & 0 & 8 & 1 \\ \infty & -3 & \infty & 0 & -2 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re a jobb oldali táblázat a Dijkstra-algoritmusban szereplő $t(v)$ (v aktuális távolsága v_1-től) tömb változásait mutathatja. Adjuk meg a legrövidebb utakat tartalmazó $m(v)$ (v-t megelőző csúcs) tömb állapotait is.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	*	*	7
0	2	5	9	*	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

5. Éllistával adott a súlyozott élű $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Javasoljunk egy legfeljebb $c \cdot (n + e)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására.

6. a) Nyári utazásunkra valutát akarunk váltani. A pénzváltó n különböző valutával foglalkozik, a j. fajta 1 egységéért r_{ij}-t kell fizetni az i. pénznemben. (Például ha a j. az Euró, az i. a Forint, akkor r_{ij} értéke most 310 körül lehet.) Adjunk olyan hatékony (vagyis polinomiális lépésszámú) algoritmust, ami az r_{ij} tömb felhasználásával meghatározza, hogy egy adott fajta valutáról (például a forintról) mi az elérhető legjobb átváltási arány, ha feltesszük, hogy az átváltásokért nem számolnak fel külön költséget. (Az i. valutáról a j.-re való átváltás történhet több lépcsőben is.)

b) Mit mondhatunk az a) feladatbeli algoritmus lépésszámáról?

c) Módosítsuk a feladatot annyiban, hogy nem csak egy adott valutáról kell meghatároznunk az összes többire való legkedvezőbb átváltási arányt, hanem bármely kettő között. Természetesen most is lehetséges volna az a) feladatban megadott algoritmust használni, ha azt n-szer lefuttatjuk (minden kiinduló valutára egyszer-egyszer). Adjunk ennél hatékonyabb algoritmust erre a feladatra, és határozzuk meg a lépésszámát.

7. A G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjunk n^2-tel arányos lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.

8. Adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefelé haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfelé eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefelé eső fehér pixelek számának összege a lehető legkisebb legyen. (A vonal mindenütt a pixelek között fut.) Adjunk a feladatra legfeljebb n^4-nel arányos lépésszámú algoritmust.